Axiomatische Untersuchungen über die Richtung und die Anordnung der Punkte auf der Geraden

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät der
Philipps - Universität zu Marburg

vorgelegt von

Alfred Irmer
aus Siegen i. Westf.

Marburg 1937

Druck: W. May, Köln, Trajanstr. 39, Tel. 94702.

Als Dissertation angenommen am 28. 3. 1933.

Berichterstatter: Professor Dr. Krafft.
Mitberichterstatter: Professor Dr. Hasse.
Tag der mündlichen Prüfung: 22. 6. 1933.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Einleitung: Aufgabe der Arbeit 1

I. Der Zusammenhang der linearen Ordnung mit den beiden zueinander entgegengesetzten Richtungen auf der Geraden 3
1. Der Hauptsatz über die lineare Ordnung . . . 3
2. Zweite Form des Hauptsatzes 5
3. Dritte Fassung des Hauptsatzes: Die beiden zueinander entgegengesetzten Richtungen auf der Geraden . . 7

II. Beweis des Hauptsatzes 10
1. Beweis der Einzigkeit der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 10
2. Beweis der Existenz der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 aus linearen Anordnungssätzen 11
3. Beweis der Existenz der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 aus den linearen, ebenen und räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen in Hilberts „Grundlagen“ (7. Auflage) 17

III. Aufstellung verschiedener Systeme unabhängiger linearer Axiome, aus denen sich der Hauptsatz über die lineare Ordnung beweisen läßt, durch Erweiterung des Hilbertschen Systems linearer Axiome 24
1. Die Nichtbeweisbarkeit des Hauptsatzes aus den linearen Anordnungsaxiomen II 1, II 2 a, b und II 3 a, b (den Axiomen der „Gruppe L“) 24
2. Die Nichtbeweisbarkeit des Hauptsatzes aus den Axiomensystemen, die je aus der Gruppe L und einem einzigen der Sätze S II 5 — S II 8 bestehen . . . 26
3. Die zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden Axiomensysteme, die je aus der Gruppe L und Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8 bestehen und die Forderung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome erfüllen 34

Seite

4. Über die Verwendung der Axiome II 2 a und II 2 b beim Beweis des Hauptsatzes 40
5. Ein weiteres System unabhängiger linearer Axiome, aus denen sich der Hauptsatz beweisen läßt. — Der Mooresche Vierpunktesatz 46

IV. Ein ebenes System von unabhängigen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen, in dem „die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben“ 47

V. Anhang: Der Begriff der „gleichen Richtung“ je zweier Geraden eines Parallelenbüschels in seiner Beziehung zum Begriff der „beiden Richtungen auf der Geraden“ . . 58

Literaturverzeichnis 67

Lebenslauf 68

Einleitung.

Zu den geometrischen Begriffen, die als wesentlicher Bestandteil des Inhaltes von Definitionen und Sätzen meist anschaulich, ohne ausdrückliche Herleitung aus geometrischen Axiomen, benutzt werden, gehören die Begriffe der *„Richtung"*. Der Ausdruck „Richtung", in bezug auf die Gerade gebraucht, tritt u. a. in folgenden Fällen auf:

(1.) Es gibt eine Erklärung, die zwei „zueinander entgegengesetzte Richtungen" *auf der Geraden* unterscheidet.

(2.) Je zwei Geraden eines *Parallelenbüschels* schreibt man „gleiche Richtung" zu.

Aufgabe dieser Arbeit ist es, die unter (1.) und (2.) genannten Begriffe der Richtung auf Grund von *Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen* zu untersuchen:

Im Falle (1.) wird der Zusammenhang der beiden zueinander entgegengesetzten Richtungen mit der *„Anordnung"* der Punkte auf der Geraden festgestellt. Der Hauptsatz über die lineare Ordnung [1]) und der Satz von den beiden Richtungen auf der Geraden [2]) werden als gleichwertig erwiesen.

Wie bekannt ist, läßt sich der Hauptsatz über die lineare Ordnung mittels der von *Hilbert* in seinen „Grundlagen der Geometrie" (7. Auflage) aufgestellten Axiome der Verknüpfung und Anordnung nur unter Zuhilfenahme der ebenen und räumlichen Axiome beweisen. In Hilberts „Grundlagen" (7. Auflage) werden *in der Ebene drei lineare Anordnungssätze bewiesen*, die zusammen mit den Hilbertschen linearen Anordnungsaxiomen zum linearen Beweis des Hauptsatzes über die lineare Ordnung ausreichen. Unsere Aufgabe ist es, diesen Beweis vollständig und auf möglichst einfache Weise zu führen. Dies geschieht auf mehrere Arten, und zwar ist es möglich, die Zahl der *ebenen Beweise* von drei auf zwei *herabzusetzen*.

---

[1]) S. 4.
[2]) S. 7.

Anschließend wird das Problem der Beweisbarkeit des Hauptsatzes über die lineare Ordnung *allein aus linearen Axiomen* behandelt:

Zunächst werden unter Benutzung der Grundbeziehung *„zwischen"* der Hilbertschen Anordnungsaxiome verschiedene Systeme voneinander *unabhängiger linearer* Axiome aufgestellt, aus denen sich auf der Geraden die Möglichkeit der Ordnung der Gesamtheit aller Punkte und damit die Existenz der beiden Richtungen beweisen lassen. Diese Untersuchungen schließen sich in gewisser Weise an die Arbeit von *E. V. Huntington* und *I. R. Kline* "Sets of independent postulates for betweenness" in den "Transactions of the American Mathematical Society", Volume 18, 1917, an. Während in ihr die Frage der linearen Ordnung bei Voraussetzung von *vier* und nur vier Punkten in umfassender Weise behandelt wird, setzen wir von vorneherein die Gerade als *unendliche* Punktmenge voraus.

Unsere Untersuchungen sollen zugleich einen Beitrag liefern zur Behandlung folgender von *Hilbert* in der 6. Auflage seiner „Grundlagen" (S. 6, Anmerkung 1) gestellten Aufgabe:

„Es ist wünschenswert, ein solches System von *unabhängigen* Axiomen aufzustellen, daß *die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben*".

Zur Lösung dieses Problems, das sich auf die *ebene* bzw. räumliche Geometrie bezieht, gilt es, das System der Hilbertschen *linearen* Anordnungsaxiome zu einem linearen System zu *erweitern*, das zum Beweis des Hauptsatzes über die lineare Ordnung ausreicht, auf der anderen Seite aber das System der *ebenen* und räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome so *einzuschränken*, daß das neue Gesamtsystem die Forderung der *Unabhängigkeit* der Axiome erfüllt. Für die Ebene werden wir den Nachweis der Existenz eines solchen Systems erbringen.

In einem Anhang soll schließlich die Beziehung der unter (1.) und (2.) genannten Begriffe der Richtung zueinander festgestellt werden.

I. Der Zusammenhang der linearen Ordnung mit den beiden zueinander entgegengesetzten Richtungen auf der Geraden.

1. Der Hauptsatz über die lineare Ordnung.

Nach *Hilbert* (Grundlagen, Kapitel I) läßt sich die Euklidische Geometrie auf *fünf Axiomgruppen* aufbauen: den Axiomen der Verknüpfung (Gruppe I), der Anordnung (II), der Kongruenz (III), dem Parallelenaxiom (IV) und den Axiomen der Stetigkeit (V).

Daß die Gerade eine geordnete Punktmenge ist, läßt sich im Hilbertschen Axiomensystem mittels der beiden ersten Axiomgruppen beweisen. Die Anordnungsaxiome enthalten als Grundbegriff die Beziehung „zwischen", durch die auf der Geraden jeweils ein Punkt mit einem geordneten Punktepaar, d. h. dem System zweier in bestimmter Reihenfolge gegebener Punkte, verknüpft ist.

Für die Aussage: „Die Punkte A, B und C liegen auf einer und derselben Geraden, und B liegt zwischen A und C" führen wir die kurze Schreibweise ABC ein.

Das erste Hilbertsche Anordnungsaxiom II 1 sagt aus: Aus ABC folgt, daß A, B und C voneinander verschieden sind und daß auch CBA gilt.

Zur Aufstellung des Satzes von der linearen Ordnung bedürfen wir folgender Begriffe der Mengenlehre:

Definition I.

a. Eine auf eine Menge anwendbare[3]), etwa durch das Zeichen $<$ (zu lesen: vor) ausgedrückte Beziehung heißt *ordnende Beziehung*, wenn von ihr gilt:

(1.) Sie ist transitiv:
Sind a, b und c Elemente der Menge, so folgt aus den beiden Beziehungen $a < b$ und $b < c$ die Beziehung $a < c$.

---

[3]) Eine Beziehung ist auf eine Menge anwendbar, wenn für je zwei (bezw. drei usw.) Elemente der Menge feststeht, ob sie in der Beziehung stehen oder nicht.

(2.) Sie ist areflexiv:
Für kein Element a der Menge gilt $a < a$.

(3.) Sie ist asymmetrisch:
Für je zwei verschiedene Elemente a und b der Menge besteht höchstens eine der beiden Beziehungen $a < b$, $b < a$ [4]).

b. Eine Menge heißt *geordnet*, wenn für sie eine ordnende Beziehung $<$ definiert ist, so daß für *je zwei* voneinander verschiedene Elemente a und b der Menge entweder $a < b$ oder $b < a$ gilt.

c. Auf eine Menge sei eine etwa durch das Zeichen R ausgedrückte asymmetrische Beziehung anwendbar. Dann wird durch die Festsetzung: „Die Aussagen aRb und bR'a sind identisch" eine auf die Menge anwendbare Beziehung R' definiert, die ebenfalls asymmetrisch ist. R' heißt die zu R *inverse* Beziehung.

d. Die zu einer ordnenden Beziehung $<$ inverse Beziehung wird durch das Zeichen $>$ (zu lesen: nach) ausgedrückt. Sie ist ebenfalls eine ordnende Beziehung.

Unter Benutzung dieser Erklärungen läßt sich der *noch zu beweisende* [5]) *Hauptsatz über die lineare Ordnung* so ausdrücken:

Satz 1.

a. Die Gesamtheit aller *Punkte einer Geraden* läßt sich so als *geordnete Menge* darstellen, daß die ordnende Beziehung $<$ der Bedingung genügt:

Es gilt dann und nur dann $A < B < C$ oder $A > B > C$, wenn ABC gilt.

b. Zwei ordnende Beziehungen, die beide die Forderung 1 a erfüllen, sind entweder *identisch oder invers.*

Satz 1 kennzeichnet die Zwischenbeziehung der Anordnungsaxiome als grundlegend für die lineare Ordnung. Er fordert, daß die Aussage „B liegt zwischen A und C" der Anordnungsaxiome bei einer aus den Axiomen zu beweisenden linearen Ordnung die Bedeutung haben muß, daß die Punkte A, B und C entweder in der Reihenfolge A, B, C oder in der Reihenfolge C, B, A stehen sollen. Dieser Forderung müssen die Axiome Rechnung tragen. 1 b drückt die Forderung aus, daß die lineare Ordnung eindeutig bestimmt, also von der besonderen Art des Beweises ihrer Existenz unabhängig ist.

---

[4]) Die Eigenschaft (3.) folgt aus den Eigenschaften (1.) und (2.): Wäre gleichzeitig $a < b$ und $b < a$, so müßte nach (1.) $a < a$ sein, im Gegensatz zu (2.).

[5]) Der Beweis folgt in Kapitel II.

2. Zweite Form des Hauptsatzes.

Ehe wir den Satz von den beiden Richtungen auf der Geraden aussprechen, wollen wir einen Satz aufstellen, der sowohl dem Satz 1 über die lineare Ordnung, als auch dem Satz von den beiden Richtungen *logisch äquivalent* ist, woraus sich auch die Äquivalenz zwischen diesen beiden Sätzen ergibt. Wir benötigen dazu einige weitere Erklärungen:

Definition II.

Unter der „*gerichteten Strecke* $\overline{AB}$“ [6]) verstehen wir das System der beiden verschiedenen, in der Reihenfolge ihrer Nennung gegebenen Punkte A und B. A heißt Anfangs-, B Endpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Definition III.

Der Ausdruck: „Die Elemente einer Menge $\mathfrak{M}$ sind *in Klassen eingeteilt*“ soll besagen: Es sind Mengen, Klassen, vorhanden derart, daß jede Klasse nur Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ enthält, und zwar mindestens eins, und daß jedes Element von $\mathfrak{M}$ einer und nur einer der Klassen angehört. Oder: Es sind nicht leere elementfremde Teilmengen, Klassen, von $\mathfrak{M}$ gegeben, deren Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ ist.

Der Hauptsatz 1 über die lineare Ordnung erweist sich nun als gleichbedeutend mit dem

Satz 1'.

a. Die Gesamtheit aller *gerichteten Strecken einer Geraden* läßt sich so in *zwei Klassen* einteilen, daß auf der Geraden die Beziehungen bestehen:

1. Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gehören dann und nur dann zu derselben Klasse, wenn ABC gilt [7]).
2. Gehören $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ zu derselben Klasse, so enthält diese auch $\overline{AC}$.

b. Es gibt *nur eine* Klasseneinteilung von der Art 1'a.

---

[6]) Zu unterscheiden von der nicht gerichteten „Strecke AB oder BA“ nach Definition VI auf S. 17.

[7]) Stillschweigend vorausgesetzt wird hier, daß im Falle ABC die Punkte A, B und C voneinander verschieden sind. Bei zwei derselben Klasse angehörenden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ muß also $A \neq C$ sein, d. h.: Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BA}$ können nicht derselben Klasse angehören.

Im besonderen gilt

Satz 2.

a. Die Existenz der *linearen Ordnung* des Satzes 1 ist der Existenz der *Klasseneinteilung* des Satzes 1' logisch äquivalent.

b. Die Einzigkeit der linearen Ordnung des Satzes 1 ist der Einzigkeit der Klasseneinteilung des Satzes 1' logisch äquivalent [8]).

Der *Beweis* dieses Satzes stützt sich auf folgende leicht zu beweisenden allgemeinen Tatsachen:

(α) Für die Menge $\mathfrak{N}$ aller geordneten Paare (a; b) voneinander verschiedener Elemente a und b einer Menge $\mathfrak{M}$ sei eine Einteilung K in zwei Klassen so gegeben, daß K die Bedingung erfüllt:

Gehören zwei Elementpaare (a; b) und (b; c) zu derselben Klasse, so ist $a \neq c$ [9]), und es gehört auch (a; c) in diese Klasse.

Aus dieser Klasseneinteilung erhalten wir eine die Menge $\mathfrak{M}$ ordnende Beziehung durch die Festsetzung: Für irgend zwei voneinander verschiedene Elemente a und b aus $\mathfrak{M}$ gilt dann und nur dann $a < b$, wenn das geordnete Elementpaar (a; b) einer bestimmten Klasse der Klasseneinteilung K angehört.

Wir sagen: Die durch die Beziehung $<$ gegebene *Ordnung O entspringt aus der Klasseneinteilung K* der Menge $\mathfrak{N}$ aller geordneten Paare (a; b) voneinander verschiedener Elemente a und b der Menge $\mathfrak{M}$.

Aus der Klasseneinteilung K entspringt die zu O inverse Ordnung O', wenn man von der anderen Klasse ausgeht.

Zwei aus derselben Klasseneinteilung K entspringende Ordnungen O_1 und O_2 sind also entweder identisch oder zueinander invers.

(β) *Umgekehrt* gibt es zu jeder Ordnung O einer Menge $\mathfrak{M}$ eine Klasseneinteilung K der aus $\mathfrak{M}$ zu bildenden Menge $\mathfrak{N}$ aller geordneten Paare (a; b) voneinander verschiedener Elemente a und b, so daß O aus K im Sinne von (α) entspringt:

Wir bilden von $\mathfrak{N}$ folgende beiden Teilmengen: Die eine umfaßt alle Elementpaare (a; b), für die $a < b$ gilt, die andere alle Elementpaare (c; d), für die $c > d$ gilt. Die beiden Teilmengen sind elementfremd, ihre Vereinigungsmenge ist $\mathfrak{N}$. Sie

---

[8]) Dabei ist von dem Unterschied zwischen zwei zueinander inversen Ordnungen abgesehen.

[9]) Daraus folgt im besonderen, daß zwei Elementpaare (a;b) und (b;a) nicht derselben Klasse angehören können.

stellen die Klassen einer Klasseneinteilung K dar, aus der die gegebene Ordnung O im Sinne von (α) entspringt.

Zwei Klasseneinteilungen K_1 und K_2, aus denen dieselbe Ordnung O im Sinne von (α) entspringt, sind identisch.

Mit Hilfe der allgemeinen Tatsachen (α) und (β) ergibt sich leicht *Satz 2:*

1) Aus 1'a folgt 1 a: Eine Klasseneinteilung, die die Bedingungen des Satzes 1'a erfüllt, ist eine Klasseneinteilung K mit den in (α) geforderten Eigenschaften. Die nach (α) aus ihr entspringende Ordnung O ist eine lineare Ordnung von der Art 1 a.

2) Umgekehrt: Aus 1 a folgt 1'a: Bei gegebener linearer Ordnung 1 a existiert nach (β) eine Klasseneinteilung K, aus der die lineare Ordnung im Sinne von (α) entspringt. Diese Klasseneinteilung K erfüllt die Bedingungen des Satzes 1'a.

3) Aus 1'b folgt 1 b: Sind zwei lineare Ordnungen O_1 und O_2 gegeben, die beide die Bedingung des Satzes 1 a erfüllen, so entspringt nach (β) O_1 aus einer Klasseneinteilung K_1, O_2 aus einer Klasseneinteilung K_2. Da K_1 und K_2 beide die Bedingungen des Satzes 1'a erfüllen, sind sie nach 1'b identisch. Nach (α) müssen also die beiden linearen Ordnungen O_1 und O_2 entweder identisch oder invers sein.

4) Aus 1 b folgt 1'b: Sind umgekehrt zwei Klasseneinteilungen K_1 und K_2 gegeben, die beide die Bedingungen des Satzes 1'a erfüllen, so entspringen aus ihnen nach (α) zwei lineare Ordnungen O_1 bzw. O_2, die beide der Bedingung 1 a genügen, nach 1 b also entweder identisch oder zueinander invers sind. Sind sie invers, so ist die zu O_1 inverse Ordnung identisch mit O_2. Auf jeden Fall entspringt aus den beiden Klasseneinteilungen K_1 und K_2 dieselbe Ordnung O, sodaß sie nach (β) identisch sein müssen.

3. Dritte Fassung des Hauptsatzes: Die beiden zueinander entgegengesetzten Richtungen auf der Geraden.

Der Satz 1' soll uns als Brücke dienen, um von der linearen Ordnung des Satzes 1 zum *Satz von den beiden Richtungen auf der Geraden* zu gelangen. Dieser lautet:

Satz 1".

a. Auf die Gesamtheit aller *gerichteten Strecken einer Geraden* ist eine, etwa durch das Zeichen ⟶ (gleichgerichtet) aus-

gedrückte, *Gleichheitsbeziehung* anwendbar, die im besonderen die Bedingungen erfüllt:

1. Es ist dann und nur dann $\overline{AB} \longrightarrow \overline{BC}$, wenn ABC gilt [10]).

2. Ist $\overline{AB} \longrightarrow \overline{BC}$, so ist auch $\overline{AB} \longrightarrow \overline{AC}$.

3. Aus $\overline{AB} \dashv\vdash \overline{CD}$, $\overline{CD} \dashv\vdash \overline{EF}$ folgt $\overline{AB} \longrightarrow \overline{EF}$.

(Das Zeichen $\dashv\vdash$ bedeutet: entgegengesetzt gerichtet, d. h. nicht gleichgerichtet).

b. Zwei Gleichheitsbeziehungen, die beide die Bedingungen 1"a erfüllen, sind *identisch*.

Definition IV.

Eine, etwa durch das Zeichen $\sim$ (äquivalent) ausgedrückte, auf eine Menge anwendbare Beziehung heißt *Gleichheitsbeziehung*, wenn sie folgende drei Eigenschaften hat:

(1.) die der Symmetrie: aus $a \sim b$ folgt $b \sim a$;

(2.) die der Transitivität: aus $a \sim b$, $b \sim c$ folgt $a \sim c$;

(3.) die der Reflexivität: es ist stets $a \sim a$ [11]).

Wie im vorigen Abschnitt die Sätze 1 und 1', so vergleichen wir jetzt die Sätze 1' und 1":

Satz 3.

a. Die Existenz der *Klasseneinteilung* des Satzes 1' ist der Existenz der *Gleichheitsbeziehung* $\longrightarrow$ des Satzes 1" logisch äquivalent.

b. Die Einzigkeit der Klasseneinteilung des Satzes 1' ist der Einzigkeit der Gleichheitsbeziehung $\longrightarrow$ des Satzes 1" logisch äquivalent.

Zum *Beweis* dieses Satzes dienen folgende allgemeinen Tatsachen:

(α) Es sei eine Einteilung K einer Menge $\mathfrak{N}$ in zwei Klassen gegeben. Setzt man zwischen je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebene Elemente a und b aus $\mathfrak{N}$ die Zeichen $\sim$ oder $\dashv$, je nachdem ob a in derselben Klasse wie b vorkommt oder nicht, so ist die Beziehung $\sim$ eine Gleichheitsbeziehung, für die im besonderen gilt:

---

[10]) Daraus folgt, daß im Falle $\overline{AB} \longrightarrow \overline{BC}$ stets $A \neq C$ sein muß, also niemals $\overline{AB} \longrightarrow \overline{BA}$ gelten kann: Siehe Anmerkung 7 auf Seite 5.

[11]) Steht ein Element a der Menge zu einem von ihm unterschiedenen Element b der Menge in der Beziehung $\sim$, so folgt (3.) aus (1.) und (2.): aus $a \sim b$, $b \sim a$ folgt $a \sim a$.

1.) Aus $a \not\sim b$, $b \not\sim c$ folgt $a \sim c$.

2.) Es gibt wenigstens zwei Elemente a und b der Menge $\mathfrak{A}$, für die $a \not\sim b$ gilt.

Wir sagen, die so definierte *Gleichheitsbeziehung entspringt aus der Klasseneinteilung K.*

(β) *Umgekehrt:* Zu jeder auf eine Menge $\mathfrak{A}$ anwendbaren Gleichheitsbeziehung, die die beiden eben genannten Bedingungen erfüllt, gibt es eine und nur eine Klasseneinteilung K, aus der die Gleichheitsbeziehung im Sinne von (α) entspringt.

Mittels der Tatsachen (α) und (β) vollzieht sich der Beweis des Satzes 3 in entsprechender Weise wie der des Satzes 2.

Aus den Sätzen 2 und 3 ziehen wir die Folgerung:

Satz 4.

a. Die Existenz der *linearen Ordnung* $<$ des Satzes 1 ist der Existenz der *Gleichheitsbeziehung* $\longrightarrow$ des Satzes 1" logisch äquivalent.

b. Die Einzigkeit der linearen Ordnung $<$ des Satzes 1 ist der Einzigkeit der Gleichheitsbeziehung $\longrightarrow$ des Satzes 1" logisch äquivalent.

Damit ist bewiesen, daß es sich bei den *Sätzen 1' und 1" nur um eine andere Form des Hauptsatzes 1 über die lineare Ordnung* handelt. Es genügt also, einen der drei Sätze aus den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung herzuleiten. Wir werden im nächsten Kapitel den Hauptsatz in der Form des Satzes 1 beweisen.

Zwei gerichtete Strecken einer Geraden sind dann und nur dann gleichgerichtet im Sinne des Satzes 1", wenn sie derselben Klasse der Klasseneinteilung des Satzes 1' angehören. Wir können auch sagen: Zwei derselben Klasse angehörende Strecken haben gleiche „Richtung", zwei Strecken verschiedener Klassen haben verschiedene (entgegengesetzte) „Richtung". Unter der „Richtung" einer Strecke ist also ihre Eigenschaft verstanden, einer bestimmten Klasse der Klasseneinteilung des Satzes 1' anzugehören. Das Vorhandensein nur zweier (entgegengesetzter) Richtungen wird in Satz 1"a durch die Bedingung 3 ausgedrückt.

Der Zusammenhang zwischen der Ordnungsbeziehung $<$ des Satzes 1 und der Richtungsbeziehung $\longrightarrow$ des Satzes 1" wird besonders deutlich, wenn man, wie oben, beide aus der Klasseneinteilung des Satzes 1' hergeleitet denkt. Beim Übergang von 1' zu 1 geht man nur von einer der beiden Klassen aus: Die ihren Strecken gemeinsame Eigenschaft, gerade dieser Klasse anzugehören, wird ebenfalls zur Definition einer Beziehung benutzt, aller-

dings nicht zwischen zwei Strecken, sondern zwischen Anfangs- und Endpunkt der Strecken dieser Klasse.

II. Beweis des Hauptsatzes.

1. Beweis der Einzigkeit der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1.

Ehe wir die Existenz der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 beweisen, zeigen wir, daß ihre *Einzigkeit* ohne Zuhilfenahme von Axiomen *aus ihrer Existenz folgt.*

Das ergibt sich aus folgendem allgemeinen Satz über *asymmetrische* Beziehungen:

Satz.

Erfüllen zwei für dieselbe Menge erklärte asymmetrische Beziehungen R_1 und R_2 die Bedingungen, daß

1.) bei beiden für je zwei Elemente a und b der Menge entweder aRb oder aR'b gilt, und daß

2.) bei jeder von ihnen dann und nur dann aRb, bRc oder aR'b, bR'c gilt, wenn dies auch bei der anderen der Fall ist,

so sind die beiden Beziehungen entweder identisch oder invers.

Wir beweisen, daß zwei derartige Beziehungen R_1 und R_2 identisch sind, sofern es zwei Elemente a und b der Menge gibt, für die sowohl aR_1b als auch aR_2b gilt. Identität ist dann vorhanden, wenn für je zwei Elemente c und d, die in der Beziehung cR_1d stehen, auch cR_2d gilt. Wir setzen also das Bestehen der Beziehungen aR_1b, cR_1d, aR_2b voraus und behaupten, daß auch cR_2d gilt:

(1) Ist $a = d$, so folgt aus cR_1d und aR_1b, d. h. cR_1a und aR_1b wegen aR_2b die Beziehung cR_2a, d. h. cR_2d.

(2) Ist $a \neq d$, so gilt entweder aR_1d oder dR_1a.

(a) Im Falle aR_1d führt die Annahme dR_2c auf einen Widerspruch: Es könnte nämlich dann weder aR_2d noch dR_2a gelten. Aus aR_2d und dR_2c müßte wegen aR_1d die Beziehung dR_1c folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung cR_1d. Aus dR_2a und aR_2b hingegen würde sich wegen aR_1b die Beziehung dR_1a ergeben, im Gegensatz zur Voraussetzung aR_1d.

(b) Aus dR_1a und aR_1b folgt wegen aR_2b die Beziehung dR_2a; aus cR_1d und dR_1a wegen dR_2a die Beziehung cR_2d.

Da zwei ordnende Beziehungen, die beide der Bedingung des Hauptsatzes 1 genügen, asymmetrische Beziehungen im Sinne des soeben bewiesenen Satzes sind, müssen sie entweder identisch oder invers sein.

2. Beweis der Existenz der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 aus linearen Anordnungssätzen.

Wir wenden uns nun dem Beweis der *Existenz* einer linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 zu. *Bekannt ist, daß die linearen Anordnungsaxiome* in den neueren Auflagen von *Hilberts* „Grundlagen“ *zum Beweis nicht ausreichen.*

Es ist also notwendig, *entweder* die Hilbertschen linearen, *ebenen und räumlichen Axiome* der Verknüpfung und Anordnung hinzuzuziehen, *oder aber* das Hilbertsche System der *linearen* Anordnungsaxiome zu *erweitern* bei gleichzeitiger *Reduktion* im Bereich der *nicht linearen* Axiome der Gruppen I und II.

Wir wollen folgenden Weg einschlagen: *Zunächst bleiben wir in der linearen Geometrie.* Als Beweisgrundlage nehmen wir ein System, das aus den linearen Anordnungsaxiomen der 6. Auflage von Hilberts „Grundlagen“ (1923), sowie einer Gruppe von linearen Anordnungssätzen besteht. Dabei wird zunächst die Frage der *Unabhängigkeit* der einzelnen „Axiome“ [12]) dieses Systems *nicht erörtert.* Vielmehr lassen wir uns bei der Wahl der hinzuzunehmenden linearen Anordnungssätze nur von der Absicht leiten, einen möglichst einfachen Beweis für den Hauptsatz mittels linearer „Axiome“ zu erhalten. Inwieweit tatsächlich einzelne der beim Beweis benutzten „Axiome“ aus den übrigen beweisbar sind, wird später entschieden.

Im dritten Abschnitt dieses Kapitels führen wir den *Beweis des Hauptsatzes in der ebenen Geometrie* mittels der in der 7. Auflage von *Hilberts* „Grundlagen“ (1930) aufgestellten linearen, ebenen und räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome. Dabei benutzen wir die Ergebnisse des vorigen Beweises, indem wir nur noch diejenigen vorher verwandten linearen Anordnungssätze ableiten, die als Axiome in der 7. Auflage der „Grundlagen“ nicht vorkommen.

---

[12]) Als „Axiome“ können die Sätze dieses Systems nur in dem Sinne gelten, daß sie als unbewiesen anderen aus ihnen ableitbaren Sätzen vorangestellt werden.

In der *6. Auflage* der „Grundlagen" finden sich, von formalen Abweichungen abgesehen, folgende *linearen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome* [13]):

I 3 a [14]). Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte.

II 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so folgt, daß
   a) die Punkte A, B und C voneinander verschieden sind [15]) und
   b) B auch zwischen C und A liegt.

II 2. Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es
   a) stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und
   b) stets wenigstens einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt.

II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es
   a) stets wenigstens einen, der zwischen den beiden anderen [16]) liegt,
   b) höchstens einen, der zwischen den beiden anderen [16]) liegt.

In der *7. Auflage* der „Grundlagen" sind mit II 2 bezw. II 3 nur noch die oben genannten Teile II 2 b bezw. II 3 b bezeichnet, da sich die *Teile II 2 a und II 3 a* als aus den übrigen linearen, ebenen und räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen *beweisbar* ergeben haben. II 2 a und II 3 a erscheinen in der 7. Auflage der „Grundlagen" als die Sätze 3 und 4 auf Seite 5 bezw. 6.

Damit ist also das in der 6. Auflage aufgestellte System linearer Anordnungsaxiome, das ohnehin nicht zum Beweis des Hauptsatzes ausreichte, um weitere lineare Axiome verringert worden, wodurch sich der Anteil der ebenen und räumlichen Axiome am Beweis des Hauptsatzes vergrößert hat.

Da wir uns *vorläufig* nur in der linearen Geometrie bewegen wollen, *bleiben für uns II 2 a und II 3 a als Axiome bestehen.*

---

[13]) Die römische Ziffer gibt die Nummer der Gruppe, die arabische Ziffer die Nummer innerhalb der Gruppe an.

[14]) Das Hilbertsche Axiom I 3 besteht aus dem linearen Teil I 3 a und dem ebenen Teil I 3 b.

[15]) Das wird bei *Hilbert* stillschweigend angenommen.

[16]) Die Aussage: Von drei Punkten A, B, C einer Geraden liegt B zwischen „den beiden anderen" soll in der vorliegenden Arbeit besagen: Es gilt entweder ABC oder CBA. Nach II 1 b folgt aus jeder dieser beiden Beziehungen die andere.

Hinzu nehmen wir als „Axiome“ [17]) folgende *linearen Anordnungssätze:*

Es seien A, B, C, D Punkte einer Geraden. Dann gelten die Sätze:

S II 4 [18]). Aus ACD und ABC folgt BCD.

S II 5. Aus ACD und ABC folgt ABD.

S II 6. Aus ABD und ACD (B ≠ C) folgen entweder ACB oder BCD und entweder ABC oder CBD.

S II 7. Aus ABC und BCD folgt ABD.

S II 8. Aus ABC und ABD folgt entweder BCD oder BDC [19]).

Die Sätze S II 4 — S II 8 gehören zur Gruppe der *„Vierpunktesätze“*.

Eine wesentliche Rolle bei unserem Beweis des Hauptsatzes 1 spielt der Satz von den beiden Halbstrahlen:

Satz 5.

Jeder Punkt O einer Geraden teilt die Gesamtheit ihrer von O verschiedenen Punkte so in zwei Klassen, daß O zwischen zwei Punkten verschiedener Klassen, aber nicht zwischen zwei Punkten derselben Klasse liegt. Jede der beiden Klassen heißt „von O ausgehender *Halbstrahl*“.

Die Gültigkeit dieses Satzes ergibt sich mittels der „Axiome“ II 1, II 3 a, b, S II 5, S II 6 und S II 8 auf Grund folgender Gleichheitsbeziehung:

Definition V.

Von zwei Punkten A und B einer Geraden liegt A *auf derselben Seite* eines Punktes O der Geraden wie B, wenn A und B von O verschieden sind und nicht AOB gilt.

Daß die Beziehung V auf die Menge aller von O verschiedenen Punkte der Geraden anwendbar ist, ergibt sich aus

[17]) Siehe S. 11, Anmerkung 12).

[18]) Das vorangestellte S soll zum Ausdruck bringen, daß es sich um Sätze handelt, die im vollständigen Hilbertschen System aus den Axiomen beweisbar sind. Die Ziffer II soll auf ihre Zugehörigkeit zur Gruppe der Anordnungssätze hinweisen.

[19]) Daß A, B, C und D vier verschiedene Punkte sind, folgt bei jedem der fünf Sätze aus den beiden vorausgesetzten Beziehungen mittels II 1 a und II 3 b.

II 1 a, b und II 3 a, b. Ihre Reflexivität folgt aus II 1 a, ihre Symmetrie aus II 1 b. Beweis der Transitivität: Auf der Geraden seien A, B, C drei voneinander und von O verschiedene Punkte, für die nicht AOB und BOC gelten. Behauptung: Es gilt auch nicht AOC. Nach II 1 b und II 3 a gilt entweder ABC oder ACB oder CAB. Aus ABC und AOC würde nach S II 6 entweder AOB oder BOC, aus ACB und AOC nach S II 5 die Beziehung AOB und aus CAB und AOC nach II 1 b und S II 5 die Beziehung BOC folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Beziehung V ist eine Gleichheitsbeziehung von der in Absatz (β) auf S. 9 genannten Art. Für sie gilt nämlich: 1.) Liegt von drei vom Punkte O verschiedenen Punkten A, B, C weder A auf derselben Seite von O wie B, noch B auf derselben Seite von O wie C, so liegt doch A auf derselben Seite von O wie C: Aus AOB und BOC folgt nach II 1 b und S II 8 entweder OAC oder OCA, also nach II 3 b nicht AOC. 2.) Nach II 2 b und II 1 a gibt es zu einem beliebigen von O verschiedenen Punkte A der Geraden wenigstens einen von O verschiedenen Punkt B, so daß A nicht auf derselben Seite von O liegt wie B.

Nach Absatz (β) auf S. 9 entspringt die Klasseneinteilung des Satzes 5 aus der Gleichheitsbeziehung V im Sinne des Absatzes (α) auf S. 8/9. Zwei Punkte desselben Halbstrahls liegen also auf derselben Seite von O, zwei Punkte verschiedener Halbstrahlen auf verschiedenen Seiten von O.

Wir beweisen nun

Satz 6.

Nach Wahl eines die Gerade in die beiden Halbstrahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ teilenden Punktes O läßt sich eine die Bedingung des Hauptsatzes 1 erfüllende *lineare Ordnung* durch die Festsetzung definieren:

Zwischen irgend zwei voneinander verschiedenen Punkten P und Q einer Geraden besteht dann und nur dann die Beziehung $P < Q$, wenn entweder

a) P in $\mathfrak{A}$ und nicht OPQ oder
b) $P = O$ und Q in $\mathfrak{B}$ oder
c) P in $\mathfrak{B}$ und OPQ gilt.

Mittels II 1, II 3 a, b und Satz 5 beweisen wir zunächst:

(I) Für je zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q der Geraden gilt entweder $P < Q$ oder $Q < P$.

$P < Q$ gilt, wenn eine der Voraussetzungen 6 a)—c) zutrifft. Ist das nicht der Fall, so läßt sich das Bestehen der Beziehung $Q < P$ nachweisen:

(1) Ist P in $\mathfrak{A}$ und OPQ, so ist auch Q in $\mathfrak{A}$. Da nicht OQP gilt, ist nach 6 a) $Q < P$.

(2) Ist $P = O$ und Q in $\mathfrak{A}$, so gilt, da wegen $P = O$ nicht OQP ist, nach 6 a) $Q < P$.

(3) Es sei P in $\mathfrak{B}$ und nicht OPQ. Dann muß $Q = O$ oder PQO oder QOP gelten.

(a) Aus $Q = O$ und P in $\mathfrak{B}$ folgt nach 6 b) $Q < P$.

(b) Aus PQO und P in $\mathfrak{B}$ ergibt sich Q in $\mathfrak{B}$. Nach 6 c) ist also $Q < P$.

(c) Aus QOP und P in $\mathfrak{B}$ folgt Q in $\mathfrak{A}$. Da nicht OQP gilt, ist nach 6 a) $Q < P$.

(II) Wir beweisen nun mittels II 1, II 3 a, b, S II 4, S II 7 und Satz 5, daß aus $A < B$, $B < C$ oder $A > B$, $B > C$ die Zwischenbeziehung ABC folgt, und umgekehrt.

(A) Es sei $A < B$, $B < C$.

(1) A in $\mathfrak{A}$: Wegen $A < B$ ist nach 6 a) nicht OAB. Es ist also entweder $B = O$ oder ABO oder BOA.

(a) Im Falle $B = O$ ist wegen $B < C$ nach 6 b) C in $\mathfrak{B}$. Aus A in $\mathfrak{A}$ und C in $\mathfrak{B}$ folgt AOC, d. h. ABC.

(b) Im Falle ABO liegt auch B in $\mathfrak{A}$. Wegen $B < C$ ist nach 6 a) nicht OBC, sodaß entweder $C = O$ oder BCO oder COB gilt.

(α) Ist $C = O$, so gilt $ABC = ABO$.

(β) Aus ABO und BCO folgt ABC (S II 4).

(γ) Aus ABO und COB folgt ABC (S II 7).

(c) Im Falle BOA liegt B in $\mathfrak{B}$; wegen $B < C$ gilt nach 6 c) OBC.. Aus BOA und OBC folgt ABC (S II 7).

(2) $A = O$: Wegen $A < B$ ist nach 6 b) B in $\mathfrak{B}$, wegen $B < C$ nach 6 c) $OBC = ABC$.

(3) A in $\mathfrak{B}$: Wegen $A < B$ ist nach 6 c) OAB, sodaß auch B in $\mathfrak{B}$ liegt. Wegen $B < C$ ist nach 6 c) OBC. Aus OBC und OAB folgt ABC (S II 4).

(B) Aus $A > B$, $B > C$, d. h. $C < B$, $B < A$ folgt nach dem unter (II A) Bewiesenen CBA und daraus ABC.

(C) Umgekehrt: Es gelte ABC.

Nach dem unter (I) Bewiesenen ist entweder $A < B$ oder $A > B$ und entweder $B < C$ oder $B > C$.

(1) Neben $A < B$ führt die Annahme $B > C$ auf einen Widerspruch. Es könnte nämlich dann entgegen dem unter (I) Bewiesenen weder $A < C$ noch $A > C$ gelten: Aus $A < C$ und $C < B$ würde nach dem unter (II A) Bewiesenen ACB, aus $C < A$ und $A < B$ CAB folgen, beides im Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Neben $A > B$ führt entsprechend die Annahme $B < C$ auf einen Widerspruch.

(III) Mit Hilfe von II 1 a, II 3 b und des unter (I) und (II A) Bewiesenen ergibt sich leicht, daß die in Satz 6 definierte Beziehung transitiv ist:

Aus $A < B$, $B < C$ folgt nach (II A) ABC. Aus $C < A$ und $A < B$ würde nach (II A) CAB folgen, im Gegensatz zu ABC. Nach (I) gilt also $A < C$.

(IV) Die Beziehung des Satzes 6 ist nur für verschiedene Punkte erklärt, also areflexiv. Ihre Asymmetrie folgt aus der Areflexivität und Transitivität.

Mit dem Satze 6 ist nunmehr der *Hauptsatz 1 vollständig bewiesen.* Daß die auf Grund des Satzes 6 definierte lineare Ordnung von der Wahl des Bezugspunktes O unabhängig ist, ergibt sich aus Teil b des Hauptsatzes 1.

Beim Beweis haben wir von allen und nur den auf S. 12—13 genannten linearen Anordnungssätzen mit Ausnahme von II 2 a Gebrauch gemacht. Der beim Beweis benutzte Satz II 2 b ist wie II 2 a kein reines Anordnungsaxiom. Er hilft vielmehr die Existenz von unendlich vielen Punkten der Geraden begründen. *Man kommt aber beim Beweis auch ohne II 2 b aus*, wenn man in den Sätzen 5 und 6 den Punkt O nicht völlig beliebig wählt, sondern von ihm fordert, daß er ein beliebiger unter den Punkten ist, deren jeder zwischen zwei anderen liegt. Hauptsatz 1 spricht also die Möglichkeit der Ordnung aller *endlichen oder unendlichen* Mengen auf Grund einer den „Axiomen" II 1, II 3 a, b und S II 4 — S II 8 genügenden Zwischenbeziehung aus. Wir fassen das Ergebnis dieses Abschnitts in dem Satz zusammen:

Satz 7.

Der Hauptsatz 1 über die lineare Ordnung folgt aus den *linearen Anordnungssätzen* II 1, II 3 a, b und S II 4—S II 8.

3. Beweis der Existenz der linearen Ordnung des Hauptsatzes 1 aus den linearen, ebenen und räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen in Hilberts „Grundlagen“ (7. Auflage).

Ehe wir das im vorigen Abschnitt benutzte System hinsichtlich der Unabhängigkeit der einzelnen Sätze vollständig untersuchen, wollen wir einen Beweis des Hauptsatzes 1 auf Grund der Axiome in Hilberts „Grundlagen“ (7. Auflage) angeben. Diese enthalten als lineare Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome die oben genannten Axiome I 3 a, II 1 a, b, II 2 b und II 3 b. Als *ebene Axiome der Verknüpfung* kommen hinzu:

I 1. Zu zwei voneinander verschiedenen Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, auf der A und B liegen.

I 2. Zu zwei voneinander verschiedenen Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, auf der A und B liegen.

I 3 b. In einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.

Von den *räumlichen Verknüpfungsaxiomen* benötigen wir lediglich:

I 6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

Das *ebene Anordnungsaxiom* lautet:

II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC [20]), die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC [21]).

Definition VI.

Unter der „*Strecke AB oder BA*“ [22]) wird die Gesamtheit der Punkte verstanden, die aus dem (nicht geordneten) System

[20]) Darunter ist in der vorliegenden Arbeit die Ebene verstanden, der A, B, C angehören: Siehe auch Anmerkung 21).

[21]) Die Bezeichnung der Axiome als linear, eben und räumlich geschieht wie in den „Grundlagen“. Die Beiseitelassung der räumlichen Verknüpfungsaxiome I 4, 5, 7, 8 bedeutet, daß wir uns bei unseren Untersuchungen auf eine Ebene beschränken, von der wir, ohne uns um ihre Existenz zu kümmern, lediglich fordern, daß sie den benutzten Axiomen genügt.

[22]) Zu unterscheiden von der „gerichteten Strecke $\overline{AB}$“ nach Definition II auf S. 5.

der beiden Punkte A und B einer Geraden, sowie aus allen auf der Geraden gelegenen Punkten C besteht, für die entweder ACB oder BCA gilt. A und B heißen die Endpunkte, die Punkte C die inneren Punkte der Strecke oder *innerhalb der Strecke* gelegen. Von allen übrigen Punkten der Geraden sagen wir: sie liegen *außerhalb* der Strecke AB.

Zum *Beweis des Hauptsatzes* aus oben genanntem System *linearer, ebener und räumlicher* Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome I 1—3, I 6, II 1, II 2 b, II 3 b, II 4 der „Grundlagen" (7. Auflage) stellen wir dieses System dem im vorigen Abschnitt zum Beweis des Hauptsatzes benutzten System linearer Anordnungsaxiome II 1, II 3 a, b, S II 4—S II 8 gegenüber. Werden von letzterem diejenigen Sätze bewiesen, die in ersterem nicht vorkommen, so ist der Beweis des Hauptsatzes aus dem Hilbertschen ebenen System auf den Beweis mittels linearer Axiome des vorigen Abschnittes zurückgeführt.

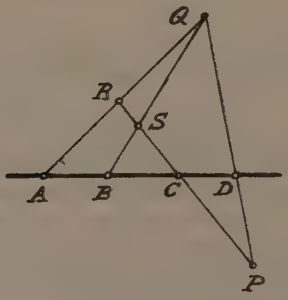
Wegen des Beweises von II 3 a verweisen wir auf Hilberts „Grundlagen" (7. Auflage, Satz 4 auf S. 6). Es gilt also nur noch, die Sätze S II 4—S II 8 zu beweisen. Das soll auf vier verschiedene Arten geschehen:

(I) Wir leiten zunächst, ähnlich wie *Hilbert* in den „Grundlagen", *die Sätze S II 4 und S II 7* unter Zuhilfenahme *ebener* und räumlicher Axiome ab, um anschließend die *übrigen Vierpunktesätze in der linearen Geometrie* zu beweisen:

Beweis des Satzes S II 4:

Aus ABC und ACD folgt BCD.

In der die Gerade mit den Punkten A, B, C, D enthaltenden Ebene existiert nach I 3 b ein außerhalb der Geraden gelegener



Figur 1.

Punkt P. Auf der Geraden PD (I 1) gibt es nach II 2 b den Punkt Q, so daß PDQ ist. Nach I 6 liegt jede Gerade, die nach I 1 zwei Punkte verbindet, deren Zugehörigkeit zur Ebene bereits nachgewiesen ist, in der Ebene. Wir wenden nun II 4 nacheinander auf verschiedene Dreiecke und Geraden an, die nicht durch die Ecken der Dreiecke gehen (I 2):

(1) Dreieck ADQ: Die Gerade PC schneidet wegen ACD die Strecke AD in C, wegen PDQ nach II 3 b jedoch nicht die Strecke DQ, muß also nach II 4 die Strecke AQ in einem Punkte R innen treffen.

(2) Dreieck ABQ: Nach (1) schneidet PC die Strecke AQ in R, wegen ABC nach II 3 b die Strecke AB nicht, muß also nach II 4 die dritte Strecke BQ in einem Punkte S innen treffen.

(3) Dreieck BDQ: PC schneidet nach (2) die Strecke BQ in S, nach (1) die Strecke DQ nicht, muß also nach II 4 die Strecke BD im Punkte C innen treffen. Nach II 1 b gilt also stets BCD.

Figur 1 besitzt vor anderen Beweisfiguren den Vorzug, daß sie *zugleich zum Beweis des Satzes S II 7* dienen kann, wenn man II 4 auf dieselbe Gerade und dieselben Dreiecke, nur in umgekehrter Reihenfolge, anwendet:

Beweis des Satzes S II 7:

Wir zeigen, daß aus ABC und BCD stets ACD folgt, woraus sich mittels II 1 b der Satz S II 7 ergibt: Aus DCB und CBA folgt DCA.

(1) Dreieck BDQ: PC schneidet wegen BCD die Strecke BD in C, dagegen nach II 3 b wegen PDQ nicht die Strecke DQ, muß also die Strecke BQ in einem Punkte S innen treffen.

(2) Dreieck ABQ: PC schneidet nach (1) die Strecke BQ in S, dagegen nach II 3 b wegen ABC nicht die Strecke AB, muß also die Strecke AQ in einem Punkte R innen treffen.

(3) Dreieck ADQ: PC schneidet nach (2) die Strecke AQ in R, nach (1) dagegen nicht die Strecke DQ, muß also die Strecke AD in C innen treffen. Nach II 1 b gilt also stets ACD.

Wir bleiben nun auf der Geraden und beweisen die übrigen Sätze in der Reihenfolge S II 5, S II 6 und S II 8.

Beweis des Satzes S II 5 aus II 1, II 3 a, b und S II 4:

Aus ABC und ACD folgt ABD.

Zunächst gilt nach S II 4 BCD. Wäre nicht ABD, so müßte nach II 1 b und II 3 a entweder BDA oder DAB gelten. Nach S II 4 würde aus BDA und BCD die Beziehung CDA, aus DAB

und DCA (II 1 b) die Beziehung CAB folgen, beides im Gegensatz (II 3 b) zur Voraussetzung. Es gilt also ABD.

Beweis des Satzes S II 6 aus II 1, II 3 a, b, S II 4 und S II 7:

Aus ABD und ACD[23]) folgt entweder ACB oder BCD und entweder ABC oder CBD.

Von den zwischen A, B, C denkbaren Beziehungen ist BAC unmöglich. Aus BAC und ACD würde nach S II 7 die Beziehung BAD folgen, im Gegensatz (II 3 b) zur Voraussetzung. Nach II 1 b und II 3 a gilt also entweder ACB oder ABC. Nach S II 4 folgt aus ACB und ABD die Beziehung CBD, aus ABC und ACD die Beziehung BCD.

Beweis des Satzes S II 8 aus II 1, II 3 a, b und S II 4.

Aus ABC und ABD folgt entweder BCD oder BDC.

Es kann nicht CAD gelten: Aus CAD und CBA (II 1 b) würde nach S II 4 entgegen II 3 b die Beziehung BAD folgen. Nach II 1 b und II 3 a muß also entweder ACD oder ADC sein. Nach S II 4 ergibt sich aus ACD und ABC die Beziehung BCD, aus ADC und ABD die Beziehung BDC.

(II) Bekannt ist eine Möglichkeit, *nach dem ebenen Beweis des Satzes S II 4 alle übrigen Vierpunktesätze S II 5 — S II 8 mittels linearer Axiome und Sätze zu beweisen,* wenn man zu den Hilbertschen linearen Axiomen II 1 und II 3 b außer den Sätzen II 3 a und S II 4 den ebenfalls in der Ebene zu beweisenden Satz II 2 a hinzunimmt.

Ein solches Verfahren ist in dem Bericht von *G. Feigl* „Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie" im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 33, 1924, S. 3—6 wiedergegeben[24]).

Unter (I) haben wir bereits, einfacher als bei Feigl, S II 4 in der Ebene bewiesen. Wie bei II 3 a verweisen wir auch bei II 2 a auf den Beweis in den „Grundlagen" (7. Auflage, Satz 3 auf S. 5). Die Sätze S II 5 und S II 8 sind unter (I) aus II 1, II 3 a, b und S II 4 bewiesen. Beim Beweis von S II 6 benutzten wir außer II 1 und II 3 a, b die Sätze S II 4 und S II 7. Wollen wir diesen Beweis hier verwenden, so müssen wir, da uns vorerst nur S II 4 zur Verfügung steht, vorher S II 7 aus linearen Axiomen beweisen.

---

[23]) $B \neq C$.

[24]) Dort ist allerdings II 2 a noch als Axiom aufgeführt.

Wir führen zunächst den im Feiglschen Bericht enthaltenen, von *E. H. Moore*[25]) stammenden Beweis des Satzes S II 7 an. Dieser Beweis ist auch deshalb bemerkenswert, weil er Moore dazu diente, den von Hilbert in der ersten Auflage der „Grundlagen" als viertes lineares Anordnungsaxiom aufgestellten *„Mooreschen Vierpunktesatz"*[26]) aus den Hilbertschen Axiomen der Gruppen I und II zu beweisen.

Kernstück des Mooreschen Beweises von S II 7 ist der Nachweis der Unmöglichkeit des Nebeneinanderbestehens der vier Relationen ABC, BCD, CDA, DAB. Dieser Nachweis wird mit Hilfe eines *fünften Punktes E unter Benutzung des Satzes II 2 a*[27]) geführt:

Beweis des Satzes S II 7 aus II 1, II 2 a, II 3 a, b, S II 4 und S II 5:

Zunächst kann nicht ADB gelten, da aus ADB und ABC nach S II 4 die Beziehung DBC folgen würde, im Gegensatz (II 3 b) zur Voraussetzung. Es ist also (II 1 b, II 3 a) entweder ABD oder DAB. Im zweiten Falle, in dem die drei Beziehungen DAB, ABC und BCD nebeneinander bestehen würden, müßte CDA sein (II 1 b, II 3 a). Nach S II 4 würde nämlich aus DCA und DAB die Beziehung CAB, aus DAC und DCB die Beziehung ACB folgen, beides (II 3 b) im Gegensatz zur Voraussetzung.

Die Unmöglichkeit des Nebeneinanderbestehens der vier Relationen ABC, BCD, CDA, DAB, des „Zyklus (ABCD)", ergibt sich mittels Annahme eines fünften Punktes E der Geraden, für den AED gilt (II 2 a). Daß E außer von A und D (II 1 a) von B und C verschieden sein müßte, folgt aus II 3 b.

Nach S II 4 und S II 5 ergäben sich aus
AED und ADC (II 1 b) die Beziehungen EDC und AEC, aus
DEA (II 1 b) und DAB die Beziehungen EAB und DEB.

Es müßten also die beiden Tripel BED, EDC, DCB und CEA, EAB, ABC nebeneinander bestehen (II 1 b). Nach dem Vorhergehenden folgen aus den beiden Tripeln die beiden Zyklen (BEDC) und (CEAB), d. h.: Es müßten zugleich CBE und BCE gelten, entgegen II 3 b.

Damit ist der Satz S II 7 bewiesen. — Da nach dem Beweis auf S. 19 S II 5 aus II 1, II 3 a, b und S II 4 folgt, können wir als Teilergebnis feststellen:

---

[25]) *E. H. Moore*, "On the projective axioms of geometry", Trans. Amer. Math. Soc., 1902.

[26]) Siehe S. 46.

[27]) II 2 a war in den ersten sechs Auflagen der „Grundlagen" als Axiom aufgestellt.

Die *Unverträglichkeit der vier Beziehungen ABC, BCD, CDA, DAB* zwischen den Punkten A, B, C, D einer Geraden folgt aus II 1, II 2 a, II 3 a, b und S II 4.

(III) Man kann den Beweis unter (II) abändern, indem man den *Satz S II 6 vor dem Satze S II 7 beweist.* Dann stößt man schon beim Beweis von S II 6 auf ein Tripel der Struktur ABC, BCD, CDA. Wir beweisen die Unmöglichkeit dieses Tripels, ohne es, wie bei Moore, zum Zyklus (ABCD) zu erweitern:

Beweis des Satzes S II 6 aus II 1, II 2 a, II 3 a, b, S II 4 und S II 5:

Wir wählen auf Grund von II 2 a einen Punkt E, so daß CED gilt. Nach II 1 a ist E von C und D, nach II 3 b außerdem von A und B verschieden.

Nach S II 4 und S II 5 würden aus

DCB und DEC (II 1 b) die Beziehungen DEB und ECB, aus
CDA und CED die Beziehungen CEA und EDA folgen.

Entgegen II 1 b und II 3 a wäre keine der drei Relationen BEA, EBA und EAB möglich: Nach S II 5 würde nämlich entgegen II 3 b aus

BEA und BCE (II 1 b) die Beziehung BCA, aus
EBA und ECB die Beziehung ECA und aus
EAB und EDA die Beziehung EDB folgen.

Da S II 5 aus II 1, II 3 a, b und S II 4 folgt, ist gezeigt:

Die *Unverträglichkeit der drei Beziehungen ABC, BCD, CDA* zwischen den Punkten A, B, C, D einer Geraden folgt aus II 1, II 2 a, II 3 a, b und S II 4.

Der Gang des Beweises von S II 6 ist nunmehr derselbe wie unter (I): Neben ABD und ACD ist CAB nicht möglich, da das Tripel DCA (II 1 b), CAB, ABD dieselbe Struktur besitzt wie das Tripel ABC, BCD, CDA.

Beweis des Satzes S II 7 aus II 1, II 3 a, b, S II 5 und S II 6:

Vorausgesetzt sind die Beziehungen ABC und BCD. Dann kann weder BDA, noch BAD gelten: Aus BDA und BCD würde nach S II 5 entgegen II 3 b die Beziehung BCA folgen. Aus BAD und BCD ergäben sich nach S II 6 entweder BAC oder CAD und entweder BCA oder ACD. Da aber nach II 3 b weder BAC noch BCA möglich sind, müßten CAD und ACD nebeneinander bestehen, entgegen II 3 b. Nach II 1 b und II 3 a gilt also ABD.

(IV) Den Beweisen unter (I)—(III) ist gemeinsam, daß *in der Ebene drei lineare Sätze bewiesen* werden: II 3 a, S II 4 und S II 7 bei (I), II 3 a, S II 4 und II 2 a bei (II) und (III). Gegenüber (I) hat also bezüglich der Zahl der ebenen Beweise der Fortfall des ebenen Beweises von S II 7 bei (II) und (III) keine Vereinfachung gebracht, da an seine Stelle der ebene Beweis von II 2 a getreten ist. Die Frage taucht auf, ob sich *II 2 a durch das ihm verwandte II 2 b ersetzen* läßt. Die Benutzung von II 2 b liegt näher, weil *II 2 b in den „Grundlagen" (7. Auflage) als Axiom aufgestellt* ist und ohnehin beim Beweis von II 3 a benötigt wird. In der Tat ist der Beweis mit II 2 b statt II 2 a möglich, wodurch *von den drei ebenen Beweisen einer wegfällt.*

Wir können uns darauf beschränken, die Unmöglichkeit des Tripels ABC, BCD, CDA nachzuweisen:

Nach II 2 b gibt es auf der Geraden einen Punkt E, so daß ACE ist. E ist außer von A und C (II 1 a) auch von B und D verschieden (II 3 b). Nach S II 4 folgt aus

ACE und ABC die Beziehung BCE, aus

ACE und ADC (II 1 b) die Beziehung DCE.

Entgegen II 1 b und II 3 a kann keine der drei Beziehungen BED, EDB und EBD gelten: Nach S II 4 folgt entgegen II 3 b aus

BED und BCE die Beziehung CED, aus

EDB und ECD (II 1 b) die Beziehung CDB und aus

EBD und ECB (II 1 b) die Beziehung CBD.

Damit ist bewiesen:

Die *Unverträglichkeit der drei Beziehungen ABC, BCD, CDA* zwischen den Punkten A, B, C, D einer Geraden folgt aus II 1, II 2 b, II 3 a, b und S II 4.

Wir können also feststellen:

Satz 8.

Der *Hauptsatz* über die lineare Ordnung folgt aus den Hilbertschen *linearen, ebenen und räumlichen* Axiomen der Verknüpfung und Anordnung
I 1—3, I 6, II 1, II 2 b, II 3 b, II 4
(„Grundlagen", 7. Auflage).

Für die Untersuchungen im nächsten Kapitel, die sich auf die lineare Geometrie beschränken, bemerken wir ausdrücklich als Teilergebnis dieses Abschnittes:

Satz 9.

Die *linearen Anordnungssätze S II 5—S II 8* folgen

a) aus II 1, II 2 a, II 3 a, b und S II 4,

b) aus II 1, II 2 b, II 3 a, b und S II 4.

Die Sätze 7 (S. 16) und 9 fassen wir zusammen in

Satz 10.

Der *Hauptsatz* über die lineare Ordnung folgt

a) aus den *linearen* Axiomen
II 1, II 2 a, II 3 a, b und S II 4,

b) aus den *linearen* Axiomen
II 1, II 2 b, II 3 a, b und S II 4.

III. Aufstellung verschiedener Systeme unabhängiger linearer Axiome, aus denen sich der Hauptsatz über die lineare Ordnung beweisen läßt, durch Erweiterung des Hilbertschen Systems linearer Axiome.

1. Die Nichtbeweisbarkeit des Hauptsatzes aus den linearen Anordnungsaxiomen II 1, II 2 a, b und II 3 a, b (den Axiomen der „Gruppe L").

Beim Beweis des Hauptsatzes aus den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung in Hilberts „Grundlagen" (7. Auflage) kamen wir mit dem System der linearen Axiome II 1 a, b, II 2 b, II 3 b nicht aus. Auch nachdem die beiden linearen Sätze II 2 a und II 3 a unter Zuhilfenahme ebener und räumlicher Axiome der Verknüpfung und Anordnung bewiesen waren, genügten die linearen Axiome und Sätze noch nicht zum Beweis des Hauptsatzes. Vielmehr bedurfte es dazu der Hinzunahme des Vierpunktesatzes S II 4, der also ebenfalls in der Ebene zu beweisen war.

Wir wollen künftig *die linearen Axiome II 1 a, b, II 2 a, b und II 3 a, b kurz als die Gruppe L bezeichnen.*

Es gilt der

Satz 11.

Der *Hauptsatz* über die lineare Ordnung läßt sich *nicht allein aus den Axiomen der Gruppe L* beweisen.

Beweis: Zunächst gilt, wie ohne weiteres ersichtlich ist,

Satz 12.

Aus dem Hauptsatz über die lineare Ordnung *folgen unmittelbar* die Sätze II 1 a, b, II 3 a, b und S II 4 — S II 8.

Wäre nun der Hauptsatz aus der Gruppe L beweisbar, so müßten sich nach Satz 12 auch die Sätze S II 4 — S II 8 aus den Axiomen der Gruppe L beweisen lassen. Das ist aber nicht der Fall:

Satz 13.

Keiner der Sätze S II 4 — S II 8 folgt aus den Axiomen der Gruppe L [28]).

Zum Beweis dieses Satzes konstruieren wir eine *Pseudogeometrie*, in der die Sätze der Gruppe L, nicht aber die Sätze S II 4 — S II 8 gelten. Damit ist dann die *Verträglichkeit* der Axiome der Gruppe L *mit dem „Gegenteil"* eines jeden der Sätze S II 4 — S II 8, das heißt aber deren *Nichtbeweisbarkeit* aus den Axiomen der Gruppe L bewiesen.

Definition VII.

Es seien X und Y zwei Punkte einer „normalen" [29]) Geraden, für die also die Sätze der Gruppe L und die Sätze S II 4 — S II 8 gelten. Die Pseudozwischenbeziehung sei mit der durch diese Sätze begründeten, d. h. normalen Zwischenbeziehung identisch, wenn unter den drei gegebenen Punkten nicht beide Punkte X und Y vorkommen. Ist das doch der Fall, so ergebe sich die Pseudozwischenbeziehung aus der normalen Zwischenbeziehung durch *Vertauschung des von X und Y verschiedenen Punktes mit X* [30]).

---

[28]) Zum Beweis des Satzes 11 genügt es, von einem einzigen der Sätze S II 4 — S II 8 die Nichtbeweisbarkeit aus den Axiomen der Gruppe L festzustellen.

[29]) Unter der „normalen Geraden" bezw. „normalen Ebene" ist hier und in Zukunft die Gerade bezw. Ebene verstanden, die durch das Hilbertsche System der „Grundlagen" begründet ist. Von diesem wird jedesmal der Teil als gültig vorausgesetzt, der zur Bildung der betr. Pseudogeometrie gerade notwendig ist.

[30]) Die Beziehung VII kommt auch bei *Feigl* vor (a. a. O., S. 4—5); sie dient dort lediglich zur Feststellung der Nichtbeweisbarkeit von S II 4 aus den Axiomen der Gruppe L.

Die Beziehung VII genügt, wie sich leicht zeigen läßt, den Sätzen, die aus den Axiomen II 1 a, b, II 2 a, b und II 3 a, b dadurch hervorgehen, daß in letzteren die Aussage: „Es gilt ABC“ durch die Aussage: „Es gilt die Pseudozwischenbeziehung / ABC /“ ersetzt wird. Wir sagen — ebenso später in entsprechenden Fällen —: Die Beziehung VII genügt den Sätzen / II 1 a / — / II 3 b / oder kurz: den Sätzen der Gruppe / L /. Sie genügt aber nicht den Sätzen / S II 4 / — / S II 8 /.

Beweis: Zu / S II 4 /: Aus / AXC / und / ACY /, d. h. AXC und ACY, folgt nach S II 4 die Beziehung XCY, d. h. / CXY /, statt / XCY /.

Zu / S II 5 /: Aus / XYD / und / XBY /, d. h. DYX und BXY, folgt nach II 1 b und S II 7 die Beziehung BXD, d. h. / BXD /, statt / XBD /.

Zu / S II 6 /: Aus / YXA / und / YCA /, d. h. YAX und YCA, folgen nach S II 5 und S II 4 die Beziehungen YCX und CAX, d. h. / YXC / und / CAX /, also weder / YCX / noch / XCA /.

Zu / S II 7 /: Aus / XBY / und / BYD /, d. h. BXY und BYD, folgt nach S II 5 die Beziehung BXD, d. h. / BXD /, also nicht / XBD /.

Zu / S II 8 /: Aus / XBY / und / XBD /, d. h. BXY und XBD, folgt nach II 1 b und S II 7 die Beziehung DBY, d. h. / DBY /, also weder / BYD / noch / BDY /.

2. Die Nichtbeweisbarkeit des Hauptsatzes aus den Axiomensystemen, die je aus der Gruppe L und einem einzigen der Sätze S II 5 — S II 8 bestehen.

Nachdem festgestellt ist, daß der Hauptsatz nicht aus den Axiomen der Gruppe L allein bewiesen werden kann, ist es unsere Aufgabe, *alle Möglichkeiten der Adjunktion von Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8* als Axiome zu den Axiomen der Gruppe L festzustellen, so daß sich aus den erweiterten Systemen voneinander unabhängiger linearer Axiome der Hauptsatz beweisen läßt. Diese Untersuchungen stellen eine Vorarbeit zur Lösung der in der Einleitung dieser Arbeit zitierten von *Hilbert* gestellten Aufgabe dar.

Aus den Voraussetzungen der Sätze S II 6 und S II 8 ergeben sich drei weitere Vierpunktesätze:

S II 6'. Aus ABD und ACD folgt
entweder ACB oder ABC.

S II 8'. Aus ABC und ABD folgt
entweder ACD oder ADC.

S II 8". Aus ABC und ABD folgt
entweder ACD oder BDC und
entweder ADC oder BCD.

Die acht Sätze S II 4 — S II 8, S II 6', S II 8' und S II 8" stellen alle möglichen einfachen Vierpunktesätze dar, bei denen von zwei Zwischenbeziehungen auf das Bestehen weiterer Zwischenbeziehungen geschlossen wird, wenn man von den Sätzen absieht, die aus einem der acht Sätze mittels II 1 b folgen. Die Sätze S II 4 — S II 8 haben gegenüber den übrigen Vierpunktesätzen den Vorzug, einer einfacheren anschaulichen Deutung fähig zu sein [31]). Da es sich in dieser Arbeit nicht um eine vollständige logische Diskussion aller Möglichkeiten einer Erweiterung der Gruppe L durch lineare Vierpunkteaxiome handelt, sondern lediglich um die Aufstellung einiger praktisch brauchbarer, zum Beweis des Hauptsatzes ausreichender Systeme unabhängiger linearer Axiome, *verzichten wir auf die Hinzunahme der Sätze S II 6', S II 8' und S II 8"*.

Unsere Untersuchungen schließen sich in gewisser Weise an die Arbeit von *E. V. Huntington* und *I. R. Kline* "Sets of independent postulates for betweenness" (Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 18, 1917) an. In ihr wird eine Aufstellung aller zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden und die Forderung der Unabhängigkeit der Axiome erfüllenden Axiomensysteme gegeben, die durch Erweiterung des *Grundsystems II 1 a, b, II 3 a, b* durch Axiome der Gruppe S II 4 — S II 8, S II 6', S II 8' und S II 8" entstehen. Während also dort die Existenz von *vier* und nur vier Punkten vorausgesetzt wird, beziehen sich unsere Untersuchungen auf eine Gesamtheit von *unendlich vielen* Punkten: Zu *unserem Grundsystem* gehören außer II 1 a, b und II 3 a, b

---

[31]) Z. B. trägt jeder der beiden Sätze S II 5 und S II 6 zur Begründung des Begriffes der „Teilstrecke" bei: Ist zu einem inneren Punkt C der Strecke AD ein innerer Punkt B der „Teilstrecke" AC gegeben, so gehört B nach S II 5 zugleich der „ganzen" Strecke AD als innerer Punkt an. Ist umgekehrt zu einem inneren Punkt B der Strecke AD ein zweiter innerer Punkt C von AD gegeben, so gehört C nach S II 6 einer der beiden „Teilstrecken" AB und BD als innerer Punkt an. — S II 7 stellt unter Berücksichtigung von II 1 b die Umkehrung des Satzes S II 4 dar. Beide helfen den „transitiven" Charakter der Zwischenbeziehung begründen.

die Sätze II 2 a und II 2 b. Es gibt aber keine endliche Punktmenge, innerhalb deren ein dieses Grundsystem enthaltendes zum Beweis des Hauptsatzes ausreichendes Axiomensystem gilt [32]).

Die Hinzunahme von II 2 a, b zum Grundsystem *ändert in entscheidender Weise die Voraussetzungen* für die Bildung der zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden Systeme unabhängiger linearer Axiome: Nach Satz 10 auf S. 24 läßt sich der Hauptsatz aus den Axiomen II 1, II 2 a oder II 2 b, II 3 a, b und S II 4 beweisen. Dagegen gilt

Satz 10'.

Der *Hauptsatz* über die lineare Ordnung läßt sich *nicht aus II 1, II 3 a, b und S II 4 allein*, bei Voraussetzung der Existenz von *nur vier Punkten*, beweisen.

Das ergibt sich aus folgender Pseudogeometrie:

Definition VIII.

Auf einer aus vier Punkten A, B, C, D bestehenden „Geraden" gelten folgende Pseudozwischenbeziehungen: / ABC /, / BCD /, / CDA /, / DAB /, / BAD /, / ADC /, / DCB /, / CBA /.

In dieser Pseudogeometrie gelten / II 1 / und / II 3 a, b /, während / S II 7 / nicht gilt und die Voraussetzungen für eine Anwendung des Satzes / S II 4 / überhaupt nicht vorhanden sind. Daraus folgt, daß sich bei Gegebensein der beiden Beziehungen ABC und BCD durch Anwendung der Axiome II 1, II 3 a, b und S II 4 allein die Gültigkeit der Beziehung ABD nicht beweisen läßt.

Durch den Beweis des Satzes 10 a, b ermutigt, könnte man den Versuch machen, den Hauptsatz auch aus den Systemen zu beweisen, die je aus der Gruppe L und *einem* der Sätze S II 5 — S II 8 bestehen. Die Versuche schlagen fehl: In Ergänzung zu Satz 10 a, b gilt

Satz 10.

c. Der *Hauptsatz* ist *nicht* aus den Axiomensystemen beweisbar, die *aus der Gruppe L und einem einzigen der Sätze S II 5 — S II 8* bestehen.

---

[32]) Siehe u. a. Satz 15 auf S. 39. — Ist auf einer durch ein solches Axiomensystem begründeten Geraden eine endliche Anzahl n von Punkten gegeben, die in der Reihenfolge der linearen Ordnung des Hauptsatzes mit den Nummern 1—n belegt sind, so ist ein Punkt P, der nach II 2 a zwischen dem ersten und zweiten Punkt liegt, bezw. nach II 2 b auf den ersten und n ten Punkt folgt, von jedem der n Punkte verschieden.

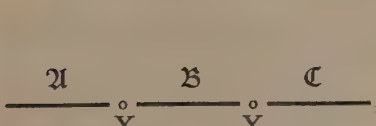
Beweis:

(I) Daß sich der Hauptsatz *nicht aus den Systemen L, S II 5 und L, S II 7* beweisen läßt, ergibt sich aus folgender Pseudogeometrie:

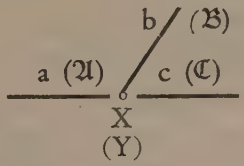
Definition IX.

Es seien X und Y zwei Punkte einer normalen Geraden. Die Menge aller Punkte P, für die PXY gilt, heiße $\mathfrak{A}$, die Menge aller zwischen X und Y gelegenen Punkte Q mit Einschluß von X heiße $\mathfrak{B}$, und die Menge aller Punkte R, für die XYR gilt, heiße $\mathfrak{C}$. Die Teilmengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind also elementfremd. Ihre Vereinigungsmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ besteht aus allen Punkten der Geraden mit Ausnahme von Y [33]) und soll unsere Pseudogeometrie darstellen. — Zwischen je drei Punkten A, B, C der Vereinigungsmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ soll dann und nur dann die Beziehung / ABC / gelten, wenn ABC ist, *außer, wenn zwei dieser Punkte in* $\mathfrak{B}$ *liegen, während der dritte zu* $\mathfrak{C}$ *gehört.* In diesem Falle gilt dann und nur dann / ABC /, wenn entweder B und A der Punktmenge $\mathfrak{B}$ angehören und BAC gilt, oder B und C zu $\mathfrak{B}$ gehören und BCA gilt: Figur 2.

Die Beziehung IX entspricht der auf die Gesamtheit aller Punkte dreier verschiedener Halbstrahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt anwendbaren Beziehung, die mit der Zwischenbeziehung der Anordnungsaxiome identisch ist, wenn man je zwei Halbstrahlen zusammen mit ihrem gemeinsamen Anfangspunkt als eine einzige Gerade betrachtet, und bei der jeder Punkt eines ausgezeichneten Halbstrahles „zwischen" zwei je auf einem der beiden anderen Halbstrahlen liegenden Punkten liegt. — Eine entsprechende Figur kann man sich aus der Geraden dadurch entstanden denken, daß der Punkt X als gemeinsamer Anfangspunkt dreier „Halbstrahlen" a, b, c gilt, von denen a durch den Halbstrahl $\mathfrak{A}$, b durch die um X in die Ebene gedrehte Strecke XY



Figur 2.



Figur 3.

[33]) Siehe Anmerkung 34) auf S. 30.

mit Ausnahme des Endpunktes Y und c durch den etwa in der Geraden XY in Richtung X bis zur Deckung von Y mit X verschobenen Halbstrahl $\mathfrak{C}$ dargestellt wird: Figur 3.

Benutzt man diese Veranschaulichung, so erkennt man zunächst ohne weiteres, daß die Axiome der Gruppe / L / gültig sind [34]).

Wir beweisen, daß auch / S II 5 / und / S II 7 / gelten, während / S II 4 / nicht gilt.

(1) *Beweis der Gültigkeit von / S II 7 /:*

Vermöge der Anschauung erkennt man, daß die Gültigkeit von / S II 7 / nur in den Fällen besonders bewiesen zu werden braucht, in denen jede der beiden Punktmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ einen, $\mathfrak{B}$ aber zwei der gegebenen Punkte enthält. Es zeigt sich, daß dann das Nebeneinanderbestehen der vorauszusetzenden Beziehungen / ABC / und / BCD / gar nicht möglich ist:

(a) Liegen A und B in $\mathfrak{B}$, so folgt, da dann jede der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ einen der Punkte C und D enthält, CBD, d. h. / CBD /.

(b) Liegen A und C in $\mathfrak{B}$, so gehört B entweder zu $\mathfrak{A}$ oder zu $\mathfrak{C}$. Liegt B in $\mathfrak{A}$, so gilt entweder BAC, d. h. / BAC /, oder BCA, d. h. / BCA /. Liegt B in $\mathfrak{C}$, so gilt entweder ACB, d. h. / CAB / oder CAB, d. h. / ACB /.

(c) Liegen A und D in $\mathfrak{B}$, so enthält jede der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ einen der Punkte B und C. Es gilt also BDC, d. h. / BDC /.

(d) $\mathfrak{B}$ enthalte die Punkte B und C. Im Falle A in $\mathfrak{A}$ folgen aus / ABC / und D in $\mathfrak{C}$ die Beziehungen ABC und ACD, woraus sich nach S II 4 BCD, d. h. / CBD /, ergibt. Im Falle A in $\mathfrak{C}$ gelten wegen / BCD / und D in $\mathfrak{A}$ die Beziehungen DBA und DCB, woraus nach S II 4 CBA, d. h. / BCA /, folgt.

(e) Liegen B und D in $\mathfrak{B}$, so ergibt sich in entsprechender Weise wie beim Beweis des Nichtgeltens von / ABC / unter (b), daß nicht / BCD / sein kann.

(f) Der Fall, daß $\mathfrak{B}$ die Punkte C und D enthält, entspricht dem Fall (a): Es gilt ACB, d. h. / ACB /.

(2) *Beweis der Gültigkeit von / S II 5 /:*

Daß / S II 5 / in unserer Pseudogeometrie gilt, ergibt sich aus der allgemeinen Tatsache:

---

[34]) Wäre der Punkt Y zu $\mathfrak{B}$ bezw. $\mathfrak{C}$ hinzugenommen worden, so gälte / II 2 b / bezw. / II 2 a / nicht.

S II 5 folgt aus II 1, II 3 a, b und S II 7:

Behauptung: Aus ABC und ACD folgt ABD.

Beweis: Zunächst gilt nicht DAB, da aus DAB und ABC nach S II 7 entgegen II 3 b die Beziehung DAC folgen würde. Nach II 3 a und II 1 b muß nun eine der drei Beziehungen CDB, DBC und BCD gelten. CDB ist unmöglich, da aus ACD und CDB nach S II 7 entgegen II 3 b die Beziehung ACB folgen würde. In den beiden anderen Fällen gilt ABD: Zusammen mit DBC würde die außer ABD nach II 3 a und II 1 b noch mögliche Beziehung ADB nach S II 7 entgegen II 3 b die Beziehung ADC ergeben. Aus BCD und ABC folgt nach S II 7 die Beziehung ABD.

(3) *Beweis des Nichtgeltens von / S II 4 /:*

Wir wählen A in $\mathfrak{C}$, B und C in $\mathfrak{B}$ und D in $\mathfrak{A}$, und zwar so, daß BCA, also / ABC /, gilt. Aus / ABC / und / ACD / müßte / BCD / folgen. Aus ACB und ABD ergibt sich aber nach S II 4 CBD, d. h. / CBD /.

(II) Wir konstruieren nun eine Pseudogeometrie, in der die Axiome der Gruppe / L / und die *Sätze / S II 6 / und / S II 8 /* gelten, während wieder / S II 4 / nicht erfüllt ist:

Definition X.

Als Pseudogerade wählen wir die normale Gerade, auf der wir folgende Pseudozwischenbeziehung definieren: Für drei Punkte A, B, C der Geraden gilt dann und nur dann die Beziehung / ABC /, wenn ABC gilt, außer, wenn unter den drei Punkten zwei auf der Geraden fest angenommene Punkte X und Y gleichzeitig vorkommen. In diesem Falle geht die Pseudozwischenbeziehung aus der entsprechenden normalen Zwischenbeziehung dadurch hervor, daß die *Reihenfolge der Punkte X und Y vertauscht* wird.

Die Gültigkeit der Axiome der Gruppe / L / ergibt sich unmittelbar aus der Anschauung.

Wie bei der vorigen Pseudozwischenbeziehung IX beweisen wir hier auf Grund der Definition lediglich die Gültigkeit eines der beiden Vierpunktesätze, nämlich des Satzes / S II 6 /. Daß auch / S II 8 / gilt, zeigen wir, indem wir S II 8 aus II 1, II 3 a, b und S II 6 beweisen.

(1) *Beweis der Gültigkeit von / S II 6 /:*

Zu untersuchen sind die Fälle, in denen zwei der gegebenen vier Punkte gleich X und Y sind. Dabei kann einer von je zwei Fällen ausscheiden, die sich lediglich in der Rolle der Punkte X

und Y unterscheiden. Tabelle 1 stellt die beim Beweis von / S II 6 / auf ihre Richtigkeit zu prüfenden Fälle dar.

	1		2		3		4		5		6		7
	A B C D	Aus	A B D	und	A C D	folgen	A C B	oder	B C D	und	A B C	oder	C B D
1	X Y C D		X Y D		X C D		X C Y		Y C D		X Y C		C Y D
2	X B Y D		X B D		X Y D		X Y B		B Y D		X B Y		Y B D
3	X B C Y		X B Y		X C Y		X C B		B C Y		X B C		C B Y
4	A X Y D		A X D		A Y D		A Y X		X Y D		A X Y		Y X D
5	A X C Y		A X Y		A C Y		A C X		X C Y		A X C		C X Y
6	A B X Y		A B Y		A X Y		A X B		B X Y		A B X		X B Y

Tabelle 1.

Jedes der in diesem Schema angeführten Punktetripel ist in Striche gesetzt zu denken.

1. Zeile: Aus / XYD / und / XCD /, d. h. YXD und XCD, folgen nach II 1 b, S II 4 und S II 5 die Beziehungen YXC und YCD, d. h. / XYC / und / YCD /.

2. Zeile: Aus / XBD / und / XYD /, d. h. XBD und YXD folgen nach II 1 b, S II 4 und S II 5 die Beziehungen YXB und YBD, d. h. / XYB / und / YBD /.

3. und 4. Zeile: Vertauscht man in den Spalten 2 und 3 X mit Y, so erhält man die den vorausgesetzten Pseudozwischenbeziehungen entsprechenden normalen Zwischenbeziehungen. Nach Anwendung von II 1 b in Zeile 3 ergeben sich in beiden Zeilen dieselben Punktetripel wie ursprünglich. Die in den Spalten 4—7 enthaltenen Punktetripel stellen also die aus den vorausgegesetzten normalen Zwischenbeziehungen nach S II 6 folgenden normalen Zwischenbeziehungen dar. Eine Vertauschung von X und Y in den Spalten 4—7 muß mithin die aus den vorausgesetzten Pseudozwischenbeziehungen folgenden Pseudozwischenbeziehungen liefern. Nach Anwendung von / II 1 b / in Zeile 3 ergibt diese Vertauschung in beiden Zeilen dieselben Punktetripel wie vorher in den Spalten 4—7. Damit ist die Gültigkeit von / S II 6 / für die Voraussetzungen der Zeilen 3 und 4 bewiesen.

5. und 6. Zeile: In den Spalten 2 und 3 vertauschen wir die Bezeichnungen von A und D einerseits und von X und Y andererseits. Wenden wir auf die so erhaltenen Beziehungen / II 1 b / an, so erhalten wir die Voraussetzungen der Zeilen 1 und 2, für die / S II 6 / bereits als gültig erwiesen ist.

(2) *Beweis von S II 8* aus II 1, II 3 a, b und S II 6.

Behauptung: Aus ABC und ABD folgt entweder BCD oder BDC.

Gälte CBD, so könnte entgegen II 3 a und II 1 b keine der Beziehungen CAD, ADC und ACD gelten: Nach S II 6 würden nämlich entgegen II 3 b

aus CAD und CBD entweder CAB oder BAD,
aus ADC und ABC entweder ADB oder BDC und
aus ACD und ABD entweder ACB oder BCD folgen.

Nach II 3 a und II 1 b gilt also entweder BCD oder BDC.

(3) *Beweis des Nichtgeltens von / S II 4 /:*

Aus / XBY / und / XYD / ergibt sich statt / BYD / die Beziehung / YBD /, da aus YBX und YXD nach S II 5 YBD folgt.

Damit ist mittels der beiden Pseudogeometrien IX und X bewiesen, daß aus keinem der Systeme, die aus der Gruppe L und *einem einzigen* der Sätze S II 5 — S II 8 bestehen, der Satz S II 4 folgt. Da nach Satz 12 auf S. 25 S II 4 eine unmittelbare Folge des Hauptsatzes ist, ist auch dieser aus keinem der genannten Systeme ableitbar. *Satz 10 c ist also bewiesen.*

Die Nichtbeweisbarkeit des Hauptsatzes aus den Axiomensystemen, die aus den Axiomen II 1, II 3 a, b und *einem einzigen* der Sätze S II 4 — S II 8 bestehen, war bisher bekannt. *Bekannt* ist auch, daß *beim System II 1, II 3 a, b, S II 4 die Hinzufügung des Existenzaxioms II 2 a den Beweis des Hauptsatzes ermöglicht.* Im vorigen Abschnitt dieses Kapitels haben wir gesehen, daß beim Beweis *an die Stelle von II 2 a das ihm verwandte Axiom II 2 b treten kann.* Dagegen haben die Untersuchungen dieses Abschnitts gezeigt, daß *in allen anderen Fällen* die Adjunktion sogar *beider* Existenzaxiome II 2 a und II 2 b *nicht zum Beweis des Hauptsatzes ausreicht.* Um zu weiteren linearen Axiomensystemen zu gelangen, aus denen sich der Hauptsatz beweisen läßt, ist also die *Adjunktion mindestens zweier Axiome* der Gruppe S II 5 — S II 8 zur Gruppe L erforderlich.

3. Die zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden Axiomensysteme, die je aus der Gruppe L und Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8 bestehen und die Forderung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome erfüllen.

Von den sechs möglichen Kombinationen *je zweier* Sätze der Gruppe S II 5 — S II 8 kommen (S II 5, S II 7) und (S II 6, S II 8) zur Adjunktion nicht in Frage, da, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, S II 5 aus L, S II 7 und S II 8 aus L, S II 6 folgt.

Um zu untersuchen, ob der Hauptsatz aus den übrigen Systemen

(α) L, S II 5, S II 6,
(β) L, S II 5, S II 8,
(γ) L, S II 6, S II 7,
(δ) L, S II 7, S II 8

beweisbar ist, genügt es nach Satz 10 a, b festzustellen, ob aus ihnen Satz S II 4 folgt.

Wir beweisen den Satz S II 4 zunächst aus dem System (β), um ihn anschließend mittels der Ergebnisse des vorigen Abschnittes leicht auch aus den übrigen Systemen zu folgern:

Zu (β): Gegeben sind ABC und ACD. Nach S II 5 gilt ABD. Aus ABC und ABD folgt nach S II 8 entweder BCD oder BDC. Aus BDC und ABC würde nach II 1 b und S II 5 entgegen II 3 b die Beziehung CDA folgen.

Zu (α): Da aus L, S II 6 der Satz S II 8 folgt (S. 33), ergibt sich aus dem System (α) das System (β), für das der Beweis bereits geführt ist.

Zu (γ): Aus L, S II 7 folgt S II 5 (S. 31), sodaß mit dem System (γ) auch das System (α) gegeben ist.

Zu (δ): In entsprechender Weise ergibt sich aus dem System (δ) das System (β).

Bei keinem dieser Beweise wurde von einem der Axiome II 2 a, b Gebrauch gemacht. Damit ist bewiesen:

Satz 14.

Aus jedem der Systeme

(α) L, S II 5, S II 6,
(β) L, S II 5, S II 8,

(γ) L, S II 6, S II 7,
(δ) L, S II 7, S II 8

folgt der Satz S II 4 *ohne Benutzung der Axiome II 2 a, b.*

Bei Adjunktion von *drei* Sätzen der Gruppe S II 5 — S II 8 zur Gruppe L wäre stets einer aus den übrigen Sätzen des betreffenden Systems beweisbar [35]). Die vier genannten Systeme (α) — (δ) sind also zusammen mit dem System L, S II 4 (Satz 10 a, b) die *einzigen* durch Adjunktion von Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8 zur Gruppe L entstehenden Systeme, aus denen der Hauptsatz beweisbar ist. Als Axiomensysteme im engeren Sinne können sie nur gelten, wenn sich die *Unabhängigkeit* der Sätze innerhalb eines Systems nachweisen läßt. Das soll im folgenden geschehen:

(I) Die Unabhängigkeit von S II 4 im System L, S II 4 ergibt sich aus Satz 13 (S. 25). In den Systemen (α) — (δ) folgt die Unabhängigkeit eines jeden der zur Gruppe L adjungierten Vierpunktesätze aus den Sätzen 14, 10 a, b und 10 c [36]). Es bleibt die Aufgabe, die Unabhängigkeit eines jeden Axioms der Gruppe L von den übrigen Axiomen eines jeden Systems nachzuweisen.

(II) Daß in allen fünf Systemen L, S II 4 und (α) — (δ) *das Axiom II 1 b von den übrigen Axiomen unabhängig* ist, ergibt sich durch Definition einer einzigen Pseudozwischenbeziehung:

Definition XI.

Der Gesamtheit aller Punkte einer normalen Geraden sei in bekannter Weise nach Wahl eines Nullpunktes und eines Einheitspunktes die Gesamtheit aller *reellen Zahlen* zugeordnet. Zwischen irgend drei Punkten P, Q und R der Geraden gelte / PQR /, wenn PQR ist, *außer*, wenn die Strecke $\overline{PQ}$ einer auf der Geraden fest angenommenen Strecke $\overline{XY}$ im Sinne des Hauptsatzes 1" *entgegengesetzt gerichtet* ist und gleichzeitig die Abszissen der Punkte P, Q und R die in Tabelle 2 angegebene Zugehörigkeit zu den *Klassen r und i der rationalen bezw. irrationalen Zahlen* aufweisen. In diesem Falle gilt trotz Bestehens der normalen

---

[35]) Siehe S. 41.

[36]) Bemerkenswert ist, daß zum Beweis der Unabhängigkeit eines jeden der fünf Vierpunktesätze S II 4 — S II 8 in fünf verschiedenen Systemen im ganzen nur drei Pseudogeometrien (Definitionen VI, IX und X) benötigt werden.

Zwischenbeziehung PQR die Pseudozwischenbeziehung / PQR / überhaupt nicht [37]).

	P	Q	R
1	r	r	i
2	r	i	r
3	i	r	i
4	i	i	r

Tabelle 2.

	A	B	C	D
1	r	r	r	r
2	r	i	i	i
3	i	r	r	r
4	i	i	i	i

Tabelle 3.

In der Pseudogeometrie der Definition XI gilt / II 1 b / nicht, wohl aber gelten alle übrigen Sätze der Gruppen / L / und / S II 4 / — / S II 8 /.

(1) Zu / II 2 a, b / [38]): Zu untersuchen ist nur der Fall, daß $\overline{AC}$ entgegengesetzt gerichtet $\overline{XY}$ ist. Tabelle 3 zeigt, im Vergleich mit Tabelle 2, daß zu beiden Punkten A und C der Geraden, einerlei, welcher der beiden Klassen r und i ihre Abszissen angehören, stets zwei Punkte B und D so existieren, daß / ABC / und / ACD / gelten. Dabei sind B und D so gewählt zu denken, daß ABC und ACD gelten. Eine andere Möglichkeit der Wahl von B und D besteht in keinem der vier Fälle: Würden wir z. B. in der ersten Zeile die Abszissen der Punkte B und D irrational statt rational wählen, so hätten wir bei den Abszissen der Punktetripel A, B, C bezw. A, C, D die Aufeinanderfolge r, i, r bezw. r, r, i, sodaß nach Tabelle 2 die Beziehungen / ABC / und / ACD / nicht gelten könnten.

(2) Die Gültigkeit von / II 3 a, b / ist ohne weiteres ersichtlich [39]).

Für den folgenden Beweis der Gültigkeit der Sätze / S II 4 / — / S II 8 / heben wir hervor, daß nach Definition XI für drei Punkte P, Q und R das Bestehen der Pseudozwischenbeziehung / PQR / die Gültigkeit der entsprechenden normalen Beziehung PQR zur Voraussetzung hat. Wir benutzen beim Beweis die Tabelle 4, die alle möglichen Fälle der Zugehörigkeit der Abszissen von A, B, C, D zu den Klassen r und i enthält:

---

[37]) Dagegen gilt in diesen Fällen die Beziehung / RQP /.

[38]) Siehe Wortlaut auf S. 12.

[39]) Siehe Anmerkung 16) auf S. 12.

	A	B	C	D
1	r	r	r	r
2	r	r	r	i
3	r	r	i	r
4	r	r	i	i
5	r	i	r	r
6	r	i	r	i
7	r	i	i	r
8	r	i	i	i
9	i	r	r	r
10	i	r	r	i
11	i	r	i	r
12	i	r	i	i
13	i	i	r	r
14	i	i	r	i
15	i	i	i	r
16	i	i	i	i

Tabelle 4.

(3) Zu /S II 4/: Aus /ABC/ und /ACD/ folgt /BCD/. — Es gelten ABC und ACD, woraus nach S II 4 die Beziehung BCD folgt. Ist $\overline{AB}$ gleichgerichtet $\overline{XY}$, so gilt dies wegen ABC auch für $\overline{BC}$, sodaß aus BCD /BCD/ folgt. Ist $\overline{AB}$ entgegengesetzt gerichtet $\overline{XY}$, so gilt dies wegen ABC auch für $\overline{AC}$. Aus Tabelle 4 ersehen wir bei Vergleich mit Tabelle 2, daß das gleichzeitige Bestehen der Voraussetzungen /ABC/ und /ACD/ nur in den Fällen 1, 8, 9 und 16 möglich ist: In den Fällen 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13 und 14 gilt nicht /ABC/, in den Fällen 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 und 15 gilt nicht /ACD/. In den Fällen 1, 8, 9 und 16 weisen die Abszissen der Punkte B, C und D nicht die in Tabelle 2 angegebene Zugehörigkeit zu den Klassen r und i auf[40]). Mit BCD gilt also auch /BCD/.

(4) Zu /S II 5/: Aus /ABC/ und /ACD/ folgt /ABD/. — Es gelten ABC und ACD, woraus nach S II 5 die Beziehung ABD folgt. Ist $\overline{AB}$ gleichgerichtet $\overline{XY}$, so gilt auch /ABD/. Ist $\overline{AB}$ entgegengesetzt gerichtet $\overline{XY}$, so gilt dies wegen ABC auch für $\overline{AC}$. Nach Absatz (3) dieses Beweises ist das gleichzeitige Bestehen der Voraussetzungen /ABC/ und /ACD/ nur in den Fällen 1, 8, 9 und 16 möglich, in denen nach Tabelle 2 auch /ABD/ gilt.

(5) Zu /S II 6/: Aus /ABD/ und /ACD/ folgen entweder /ABC/ oder /CBD/ und entweder /ACB/ oder /BCD/. Mit /ABD/ und /ACD/ gelten ABD und ACD, woraus nach S II 6 und II 3 b entweder ABC und BCD oder ACB und CBD folgen. Ist $\overline{AB}$ gleichgerichtet $\overline{XY}$, so gilt dies im ersten Falle wegen ABC auch für $\overline{BC}$, im zweiten Falle wegen ACB auch für $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$. Es gelten also entweder /ABC/ und /BCD/ oder /ACB/ und /CBD/, womit auch die Gültigkeit von /S II 6/ für den Fall, daß $\overline{AB}$ gleichgerichtet $\overline{XY}$ ist, bewiesen ist. — Angenommen nun, $\overline{AB}$ sei entgegengesetzt gerichtet $\overline{XY}$. Dann gilt dies wegen ABD zunächst auch für $\overline{AD}$ und damit wegen ACD auch für $\overline{AC}$. Nach

[40]) In Tabelle 2 sind in diesem Falle die Bezeichnungen P, Q und R bezw. durch B, C und D zu ersetzen.

Tabelle 2 ist die Voraussetzung / ABD / in den Fällen 2, 4, 5, 7, 10, 12, 13 und 15 nicht erfüllt. Nach Absatz (3) dieses Beweises gilt außerdem / ACD / nicht in den Fällen 3, 6, 11 und 14. Es bleiben also auch hier nur die Fälle 1, 8, 9 und 16 übrig, in denen entweder mit ABC und BCD nach Absatz (3) / ABC / und / BCD / oder mit ACB und CBD / ACB / und / CBD / gelten.

(6) Zu / S II 7 /: Aus / ABC / und / BCD / folgt / ABD /. — Es gelten ABC und BCD, woraus nach S II 7 ABD folgt. $\overline{AB}$ sei ebenso wie $\overline{BC}$ entgegengesetzt gerichtet $\overline{XY}$. Nach Tabelle 2 ist die Voraussetzung / BCD / in den Fällen 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 und 15 nicht erfüllt. Da außerdem nach Absatz (3) / ABC / in den Fällen 4, 5, 12 und 13 nicht gilt, bleiben wiederum nur die Fälle 1, 8, 9 und 16. In ihnen gilt nach Absatz (4) / ABD /.

(7) Zu / S II 8 /: Aus / ABC / und / ABD / folgt entweder / BCD / oder / BDC /. — Es gelten ABC und ABD, sowie nach S II 8 entweder BCD oder BDC. $\overline{AB}$ sei entgegengesetzt gerichtet $\overline{XY}$. Nach Absatz (3) und (5) ist in den Fällen 2—7 und 10—15 das gleichzeitige Bestehen der Beziehungen / ABC / und / ABD / nicht möglich. Diese gelten also nur in den Fällen 1, 8, 9 und 16, in denen entweder mit BCD nach Absatz (3) / BCD / oder mit BDC / BDC / gilt.

Damit ist der Beweis für die Unabhängigkeit des Axioms II 1 b in jedem der fünf Systeme L, S II 4 und (α)—(δ) vollständig geführt [41]).

(III) *Die Unabhängigkeit von II 2 a bezw. II 2 b* in jedem dieser Systeme folgt in bekannter Weise daraus, daß außer II 2 a bezw. II 2 b alle übrigen Axiome der Gruppen L und S II 4 — S II 8 auch auf den Geradenteilen gelten, die durch Wegnahme aller

---

[41]) Der Nachweis der Unabhängigkeit des Axioms II 1 b würde sich einfacher gestalten, wenn das Axiom II 2 a, b etwa so lautete: „Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es a) stets wenigstens einen Punkt B, so daß ABC oder CBA gilt, und b) stets wenigstens einen Punkt D, so daß ACD oder DCA gilt". In diesem Falle würde nach Wahl einer bestimmten etwa als positiv zu bezeichnenden Richtung auf der Geraden die Festsetzung genügen, daß dann und nur dann / ABC / gelten soll, wenn die Strecke $\overline{AB}$ positiv gerichtet ist und ABC gilt. — Dagegen wird in den Hilbertschen Axiomen II 2 a, b bei Gegebensein zweier Punkte A und C auf der Geraden wegen der Gleichwertigkeit und Vertauschbarkeit der Punkte A und C die Existenz 1.) eines Punktes B_1 gefordert, für den AB_1C gilt, 2.) eines Punktes B_2, für den CB_2A gilt, 3.) eines Punktes D_1, für den ACD_1 gilt, 4.) eines Punktes D_2, für den CAD_2 gilt. — Siehe auch: Tschetweruchin, a. a. O., S. 70—71.

inneren Punkte einer Strecke bezw. aller Punkte eines Halbstrahles entstehen.

(IV) Für den Nachweis der *Unabhängigkeit von II 3 a* wählen wir als Pseudogerade eine normale Ebene. Für irgend drei Punkte A, B, C dieser Pseudogeraden gelte dann und nur dann die Beziehung / ABC /, wenn die drei Punkte auf einer normalen Geraden liegen und ABC gilt.

(V) Die *Unabhängigkeit von II 3 b* ergibt sich schließlich in bekannter Weise, wenn man festsetzt, daß für je drei Punkte A, B, C einer normalen Geraden die sechs möglichen Pseudozwischenbeziehungen / ABC /, / CBA /, / BCA /, / ACB /, / CAB / und / BAC / gelten sollen.

Damit ist die Unabhängigkeit eines jeden Axioms der fünf genannten Systeme nachgewiesen.

Wir fassen das Ergebnis der Untersuchungen dieses Abschnittes zusammen in dem Satz:

Satz 15.

Der Hauptsatz 1 über die lineare Ordnung läßt sich aus folgenden Systemen voneinander *unabhängiger linearer* Axiome beweisen:

(a) L, S II 4,
(b) L, S II 5, S II 6,
(c) L, S II 5, S II 8,
(d) L, S II 6, S II 7,
(e) L, S II 7, S II 8.

Diese Systeme sind die *einzigen zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden* und die Forderung der *Unabhängigkeit* der Axiome erfüllenden Axiomensysteme, die durch *Adjunktion von Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8 zu der Gruppe L* entstehen.

Im Rahmen unserer Untersuchung beansprucht die Frage der *Benutzung der Axiome II 2 a, b* zum Beweis des Hauptsatzes besonderes Interesse. Aus den Sätzen 10 a, b (S. 24) und 14 (S. 34) ergibt sich:

Satz 16.

In jedem der Axiomensysteme (15 a) — (15 e) kann *entweder II 2 a oder II 2 b* zum Beweis des Hauptsatzes *entbehrt* werden.

4. Über die Verwendung der Axiome II 2 a und II 2 b beim Beweis des Hauptsatzes.

Anregung zu den Untersuchungen, die zum Beweis des Satzes 15 führten, gab mit die Feststellung, daß das Hinzutreten des Axioms II 2 a zu den Axiomen II 1, II 3 a, b und S II 4 den Beweis des Hauptsatzes ermöglichte, der mittels dieser Axiome ohne II 2 a nicht geführt werden konnte. Wir stellen nun die Frage, in welcher Weise insgesamt die *Hinzunahme von II 2 a, b* zu der Gruppe II 1, II 3 a, b, S II 4 — S II 8 die Voraussetzungen für die Bildung der zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden Systeme unabhängiger Axiome *ändert.* Eine Aufstellung aller derartigen Systeme, die aus den Sätzen dieser Gruppe *ohne II 2 a, b* gebildet werden können, gibt die zitierte Arbeit von *Huntington* und *Kline:*

Satz 15':

Der Hauptsatz über die lineare Ordnung läßt sich aus folgenden Systemen voneinander *unabhängiger linearer* Axiome beweisen:

(a) II 1, II 3 a, b, S II 4, S II 6
(b) II 1, II 3 a, b, S II 4, S II 7
(c) II 1, II 3 a, b, S II 5, S II 6
(d) II 1, II 3 a, b, S II 6, S II 7
(e) II 1, II 3 a, b, S II 7, S II 8.

Diese Systeme sind die *einzigen zum Beweis des Hauptsatzes ausreichenden* und die Forderung der *Unabhängigkeit* der Axiome erfüllenden Axiomensysteme, die durch *Adjunktion von Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8* zu den *Axiomen II 1, II 3 a, b* entstehen.

Unsere bisherigen Untersuchungen liefern mit dem Beweis des Satzes 15 auch den des Satzes 15':

(1) Da nach Satz 7 auf S. 16 der Hauptsatz aus II 1, II 3 a, b und S II 4 — S II 8 folgt, braucht nur gezeigt zu werden, daß aus jedem der Systeme (15'a) — (15'e) die übrigen Vierpunktesätze der Gruppe S II 4 — S II 8 folgen:

Zu (15'b): Der Beweis ist auf S. 19—20 geführt.

Zu (15'a): Nach S. 19 folgt aus II 1, II 3 a, b und S II 4 der Satz S II 5 und nach S. 22 mittels S II 5 und S II 6 der Satz S II 7, d. h.: aus dem System (15'a) folgt das System (15'b).

Zu (15'c), (15'd) und (15'e): Nach Satz 14 auf S. 34 ist aus jedem der drei Systeme der Satz S II 4 beweisbar. Aus (15'c) und (15'd) folgt also das System (15'a) und aus (15'e) das System (15'b).

(2) Daß die Systeme des Satzes 15' die Forderung der *Unabhängigkeit* der Axiome erfüllen, ergibt sich hinsichtlich der Axiome II 1 und II 3 a, b aus den für die Systeme des Satzes 15 geltenden Unabhängigkeitsbeweisen der Abschnitte (II)—(V) auf S. 35—39.

Die Unabhängigkeit eines jeden der Vierpunktesätze S II 4 — S II 8 in den Systemen (15'a)—(15'e) folgt mittels der Sätze 10' und 10 c (S. 28), sowie des unter (1) Bewiesenen [42]).

(3) Zu prüfen ist noch, ob tatsächlich die Systeme des Satzes 15' die *einzig möglichen* dieser Art sind: Eine Adjunktion von *drei* Sätzen der Gruppe S II 4 — S II 8 würde gegen die Forderung der Unabhängigkeit der Axiome verstoßen: In allen möglichen Tripeln von Vierpunktesätzen dieser Gruppe ist stets ein Satz mittels der beiden anderen beweisbar:

1) S II 4, S II 5, S II 6:	S II 5 folgt mittels S II 4 nach S. 19.
2) S II 4, S II 5, S II 7:	
3) S II 4, S II 5, S II 8:	
4) S II 4, S II 6, S II 7:	S II 6 folgt mittels S II 4 und S II 7 nach S. 20.
5) S II 4, S II 6, S II 8:	S II 8 folgt mittels S II 4 nach S. 20.
6) S II 4, S II 7, S II 8:	
7) S II 5, S II 6, S II 7:	S II 5 folgt mittels S II 7 nach S. 31.
8) S II 5, S II 6, S II 8:	S II 8 folgt mittels S II 6 nach S. 33.
9) S II 5, S II 7, S II 8:	S II 5 folgt mittels S II 7 nach S. 31.
10) S II 6, S II 7, S II 8:	S II 8 folgt mittels S II 6 nach S. 33.

Von den zehn möglichen *Paaren* von Vierpunktesätzen der Gruppe S II 4 — S II 8 sind fünf in den Systemen des Satzes 15' enthalten. Die übrigen reichen zur Adjunktion nicht aus: In jedem der Paare (S II 4, S II 5), (S II 4, S II 8), (S II 5, S II 7) und (S II 6, S II 8) ist ein Satz beweisbar. Daß aber in jedem Falle

---

[42]) Auch hier ist bemerkenswert, daß man bei den Unabhängigkeitsbeweisen für jeden der fünf Vierpunktesätze in fünf verschiedenen Systemen im ganzen mit nur drei Pseudogeometrien (Definitionen VIII—X) auskommt. Siehe Anmerkung 36) auf S. 35.

die Adjunktion nur eines Vierpunktesatzes zu keinem System der geforderten Art führt, ergibt sich aus den Sätzen 10' und 10 c (S. 28). Die Nichtbeweisbarkeit des Hauptsatzes aus den Axiomen II 1, II 3 a, b, S II 5 und S II 8 folgt schließlich aus der Pseudogeometrie der Definition VIII auf S. 28.

Damit ist der Satz 15' bewiesen.

Wir *vergleichen* nun die Axiomensysteme in den Sätzen 15' und 15, um festzustellen, *welche Veränderungen das Hinzutreten von II 2 a, b zum Stamm der linearen Axiome II 1, II 3 a, b bewirkt hat:*

Zunächst finden wir die Systeme (c), (d) und (e) des Satzes 15' in den Systemen (b), (d) und (e) des Satzes 15 wieder, d. h.: in diesen durch II 2 a, b erweiterten Systemen ist die *Unabhängigkeit der vorher vorhandenen Axiome erhalten geblieben.*

Dagegen bewirkt die Adjunktion von II 2 a oder II 2 b zu den beiden Systemen (15'a) und (15'b), daß von ersterem der Satz S II 6, von letzterem der Satz S II 7 als beweisbar wegfallen.

Daß die Hinzufügung von II 2 a zu den Axiomen II 1, II 3 a, b und S II 4 ein System unabhängiger Axiome ergibt, aus dem sich der Hauptsatz beweisen läßt, war bekannt. Darüber hinaus haben unsere Untersuchungen ergeben, daß anstelle von II 2 a auch II 2 b adjungiert werden kann, und daß *auch bei der Axiomgruppe II 1, II 3 a, b, S II 5 und S II 8 die Hinzufügung von II 2 a oder II 2 b ein zum Beweis des Hauptsatzes ausreichendes System unabhängiger Axiome ergibt.*

Als Nebenergebnis unserer Untersuchungen kann festgestellt werden, daß sie einen umfassenden Aufschluß geben über die Fragen der Beweisbarkeit oder Nichtbeweisbarkeit der einzelnen Sätze der Gruppe S II 4 — S II 8. Z. B. geht aus Satz 15' hervor, daß S II 6 nicht aus den Sätzen II 1, II 3 a, b, S II 5 und S II 8 beweisbar ist: Wäre das der Fall, so folgte aus diesen Sätzen das System (15'c) (II 1, II 3 a, b, S II 5, S II 6), und daraus der Hauptsatz. Das stände aber im Widerspruch zu Satz 15' selbst, wonach die Beweisbarkeit des Hauptsatzes aus den Sätzen II 1, II 3 a, b, S II 5 und S II 8 ausgeschlossen ist. Die Sachlage ändert sich, wenn man zu diesen Sätzen II 2 a oder II 2 b als Axiom hinzunimmt. Nach Satz 15 und 16 ist aus dem erweiterten System der Hauptsatz beweisbar, aus dem unmittelbar S II 6 folgt.

Wendet man unsere Ergebnisse im *Hilbertschen System* der „Grundlagen" (7. Auflage) an, so gelangt man zu einem vollständigen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten, den

Hauptsatz aus den Hilbertschen linearen, ebenen und räumlichen Axiomen der Verknüpfung und Anordnung zu beweisen: Bei Hilbert werden, wie im 3. Abschnitt des II. Kapitels dieser Arbeit, *in der Ebene neben II 3 a die Sätze S II 4 und S II 7 bewiesen*, während die übrigen Vierpunktesätze und schließlich ein Satz über die lineare Ordnung endlich vieler Punkte innerhalb der linearen Geometrie gefolgert werden. Wir haben nun gesehen, daß sich *von den drei ebenen Beweisen* einer, nämlich *der des Satzes S II 7, entbehren* läßt, wenn man II 2 b, das ohnehin bei Hilbert als Axiom aufgestellt ist, zuhilfe nimmt (S. 23—24). Dieser Beweis ist nicht schwieriger und umfangreicher als der andere. Unsere Untersuchungen haben aber gezeigt, daß im Hilbertschen System *andere Möglichkeiten, die Zahl der ebenen Beweise* in dem durch die Sätze S II 4 — S II 8 gegebenen Rahmen *zu verringern, nicht vorhanden* sind: Auch bei Hinzunahme von II 2 b *genügt der ebene Beweis nur eines der Vierpunktesätze S II 5 — S II 8 nicht*, um den Beweis des Satzes über die lineare Ordnung in der linearen Geometrie fortführen zu können (Satz 10 c auf S. 28). In zwei Fällen ist dazu trotz Verwendung von II 2 b bei den linearen Beweisen nicht einmal der ebene Beweis *zweier* Vierpunktesätze ausreichend: nämlich bei den Sätzen S II 5 und S II 7 bezw. S II 6 und S II 8 (Satz 15). Dagegen kann man die *beiden Sätze S II 5 und S II 8 in der Ebene ableiten*, um die noch fehlenden Sätze auf der Geraden zu beweisen, wobei allerdings die *Zuhilfenahme von II 2 b notwendig* ist (Satz 15 und 15'). — Will man auf die Verwendung von II 2 b bei den linearen Beweisen verzichten, so genügt es, neben II 3 a folgende Paare von Vierpunktesätzen in der Ebene abzuleiten, um anschließend auf der Geraden bleiben zu können: 1) S II 4 und S II 6, 2) S II 4 und S II 7, 3) S II 5 und S II 6, 4) S II 6 und S II 7, 5) S II 7 und S II 8 (Satz 15').

Auf Grund des Satzes 15' stellen wir für die Systeme des Satzes 15 noch einmal ausdrücklich fest:

Satz 17.

a. Der Hauptsatz folgt aus den Axiomensystemen
(15 b) L, S II 5, S II 6,
(15 d) L, S II 6, S II 7 und
(15 e) L, S II 7, S II 8

ohne Benutzung der Axiome II 2 a, b, also ohne ausdrückliche Voraussetzung der Existenz von mehr als *vier* Punkten auf der Geraden.

b. Ein Beweis des Hauptsatzes aus den Axiomensystemen
(15 a) L, S II 4 und
(15 c) L, S II 5, S II 8
ohne ausdrückliche Benutzung von II 2 a oder II 2 b ist *nicht möglich.*

Die Hinzunahme des *Existenzaxioms II 2 a bezw. II 2 b* bedeutet die Voraussetzung einer *unendlichen Punktmenge*[43]). Wir fragen uns, ob nicht anstelle von II 2 a oder II 2 b eine *schwächere* Voraussetzung zu den Axiomen II 1, II 3 a, b und S II 4 bezw. II 1, II 3 a, b, S II 5 und S II 8 hinzugefügt werden kann: In Ergänzung zu 17 a und 17 b behaupten wir:

Satz 17.

c. Der Hauptsatz läßt sich aus den Axiomensystemen
II 1, II 3 a, b, S II 4 und
II 1, II 3 a, b, S II 5, S II 8
unter der zusätzlichen Voraussetzung der Existenz von *wenigstens fünf Punkten der Geraden* beweisen.

Beweis: Nach Satz 14 auf S. 34 folgt das erste der beiden Systeme aus dem zweiten. Es genügt also, Satz 17 c für das erste System (II 1, II 3 a, b, S II 4) zu beweisen:

Im 3. Abschnitt des vorigen Kapitels sind aus den Systemen (II 1, II 2 a, II 3 a, b, S II 4) und (II 1, II 2 b, II 3 a, b, S II 4) die übrigen Vierpunktesätze abgeleitet worden: Satz 9 auf S. 24. Nach Satz 7 auf S. 16 folgt dann der Hauptsatz aus den Sätzen II 1, II 3 a, b, S II 4 — S II 8. Es bedarf also der Axiome II 2 a bezw. II 2 b nur zum Beweis der übrigen Vierpunktesätze. Von ihnen lassen sich S II 5 und S II 8 ohne Zuhilfenahme von II 2 a, b beweisen (S. 19 bzw. 20), nicht aber die Sätze S II 6 und S II 7. Wir haben gezeigt, daß man entweder erst S II 6 unter wesentlicher Benutzung von II 2 a oder II 2 b und anschließend S II 7 ohne II 2 a oder II 2 b beweisen oder umgekehrt vorgehen kann. In beiden Fällen wurde II 2 a bzw. II 2 b lediglich dazu verwandt, die Unverträglichkeit der drei Beziehungen ABC, BCD und CDA nachzuweisen. Satz 17 c ist also bewiesen, wenn gezeigt wird:

Die *Unverträglichkeit der drei Beziehungen ABC, BCD und CDA* läßt sich aus II 1, II 3 a, b, S II 4 unter der zusätzlichen Voraussetzung der *Existenz eines fünften Punktes* E der Geraden beweisen.

---

[43]) Siehe Anmerkung 32) auf S. 28.

(a) Als Hilfsmittel zum Beweis benutzen wir die Sätze S II 5 und S II 8, die beide aus II 1, II 3 a, b und S II 4 folgen (S. 19 bzw. 20).

(b) Auf S. 22 ist nachgewiesen, daß aus II 1, II 3 a, b S II 4 und S II 5 die Unverträglichkeit der Beziehungen ABC, BCD, CDA und CED folgt, wobei E ein von den vier Punkten A, B, C, D verschiedener Punkt ist.

(c) Nach II 3 a und II 1 b muß DAB gelten, da nach S II 4 aus ABD und ADC (II 1 b) die Beziehung BDC, aus ADB und ABC die Beziehung DBC folgen würde, entgegen II 3 b.

(d) Wir zeigen nun, daß entgegen II 3 a und II 1 b keine der drei Beziehungen DEA, DAE und ADE bestehen kann:

(1) Neben BCD, CDA, DAB ist DEA nach (b) nicht möglich.

(2) Aus DAE und DAB würde nach S II 8 entweder AEB oder ABE folgen. Nach (b) ist AEB neben CDA, DAB und ABC unmöglich. Aus EBA und EAD (II 1 b) würde nach S II 5 die Beziehung EBD, aus DBE und DCB (II 1 b) nach S II 4 die Beziehung CBE und aus CBE und CBA (II 1 b) nach S II 8 entweder BEA oder BAE folgen, beides nach II 3 b im Gegensatz zu EBA. —

(3) Gälte schließlich ADE, so beständen nebeneinander die Beziehungen ADC, DCB, CBA, BAD, ADE (II 1 b), die von derselben Struktur sind wie die soeben unter (2) als unverträglich erwiesenen Beziehungen DAB, ABC, BCD, CDA, DAE.

Damit ist Satz 17 c vollständig bewiesen.

Wir haben also festgestellt, daß in den Axiomensystemen (15 a) und (15 c) der *Anteil der Axiome II 2 a bzw. II 2 b* am Beweis des Hauptsatzes im wesentlichen darin besteht, daß durch sie die Voraussetzung der *Existenz eines fünften Punktes* auf der Geraden hinzukommt. Dagegen ist die *Annahme der Existenz unendlich vieler Punkte* auf der Geraden zum Beweis des Hauptsatzes *nicht nötig.* Der Beweis mittels II 2 a bzw. II 2 b ist dennoch einfacher als der Beweis auf Grund der bloßen Annahme der Existenz eines fünften Punktes. Das hat seinen Grund darin, daß im ersten Falle der fünfte Punkt in einem *bestimmten Lageverhältnis* zu zweien der gegebenen vier Punkte, nämlich durch eine bestimmte Zwischenbeziehung, gegeben ist, während im zweiten Falle die Lage des fünften Punktes völlig unbestimmt bleibt.

Jedes der Systeme (15 b), (15 d) und (15 e), aus denen sich der Hauptsatz ohne Benutzung von II 2 a oder II 2 b, also ohne ausdrückliche Voraussetzung der Existenz von mehr als vier Punkten auf der Geraden, beweisen läßt, enthält einen der Sätze S II 6 und S II 7. Das ist nicht der Fall bei den Systemen (15 a) und

(15 c). Bei diesen waren es aber gerade die Sätze S II 6 und S II 7, zu deren Beweis die Zuhilfenahme von II 2 a oder II 2 b bzw. die Voraussetzung der Existenz eines fünften Punktes auf der Geraden notwendig wurde. *Die Sätze S II 6 und S II 7* nehmen also unter den Vierpunktesätzen S II 4—S II 8 eine *Sonderstellung* ein.

5. Ein weiteres System unabhängiger linearer Axiome, aus dem sich der Hauptsatz beweisen läßt. — Der Mooresche Vierpunktesatz.

In dem von Hilbert in der *1. Auflage* seiner „Grundlagen" aufgestellten Axiomensystem war der Beweis des Hauptsatzes aus den linearen Anordnungsaxiomen *ohne Zuhilfenahme ebener und räumlicher Axiome möglich.* Wie bereits auf S. 21 erwähnt, war als *viertes lineares Anordnungsaxiom* ein Vierpunktesatz aufgestellt, den *E. H. Moore* als aus den Hilbertschen linearen, ebenen und räumlichen Axiomen der Gruppen I und II *beweisbar* erkannte. Um der Forderung der Unabhängigkeit der Axiome zu genügen, mußte dieser Satz als Axiom preisgegeben werden, sodaß nunmehr die Hilbertschen linearen Axiome der Anordnung zum Beweis des Hauptsatzes nicht mehr ausreichten. Wir wollen den Satz kurz den *Mooreschen Vierpunktesatz S II M* nennen. Er lautet:

S II M:

Irgend vier Punkte einer Geraden lassen sich stets so mit P_1, P_2, P_3 und P_4 bezeichnen, daß die vier Beziehungen $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_2P_3P_4$ bestehen.

Es ist leicht, zu zeigen, daß jeder der Sätze S II 4—S II 8 aus II 1, II 3 b und dem Mooreschen Vierpunktesatz S II M ableitbar ist, während *II 3 a unmittelbar aus S II M* folgt, sofern die Existenz von wenigstens vier Punkten auf der Geraden gegeben ist[44]). Da der Hauptsatz nach Satz 7 auf S. 16 aus den Sätzen II 1, II 3 a, b und S II 4—S II 8 folgt, läßt er sich auch aus den Axiomen II 1, II 3 b und S II M beweisen. In diesem System ergibt sich die Unabhängigkeit von II 1 b aus der Pseudogeometrie der Definition XI auf S. 35, die Unabhängigkeit von II 3 b aus der unter (V) auf S. 39 angeführten Pseudogeometrie und die von S II M aus der Pseudogeometrie unter (IV) auf S. 39. — Es gilt also

[44]) Von dem trivialen Fall, daß nur drei Punkte auf der Geraden existieren, wird abgesehen.

Satz 18:

Der Hauptsatz folgt aus dem System unabhängiger Axiome II 1, II 3 b, S II M [44]).

Wir werden im nächsten Kapitel *auf dieses System zurückkommen.*

Umgekehrt folgt der Mooresche Vierpunktesatz S II M unmittelbar aus dem Hauptsatz. Die Systeme, die zum Beweis des Hauptsatzes führen, dienen also auch zum Beweis des Mooreschen Vierpunktesatzes. Damit stellen unsere Untersuchungen zugleich einen Beitrag zur Frage der verschiedenen Möglichkeiten des Beweises von S II M aus den Hilbertschen Axiomen der Verknüpfung und Anordnung in den „Grundlagen" (7. Auflage) dar.

IV. Ein ebenes System von unabhängigen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen, in dem „die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben" [45]).

In den Sätzen 15 und 18 sind verschiedene Systeme voneinander unabhängiger linearer Axiome angegeben worden, die zum Beweis des Hauptsatzes über die lineare Ordnung ausreichen. Die in der Überschrift dieses Kapitels zitierte Hilbertsche Forderung bezieht sich aber nicht auf die lineare, sondern auf die *ebene* und räumliche Geometrie. Um ihr zu genügen, gilt es, auf der einen Seite die Hilbertschen *linearen Anordnungsaxiome* etwa zu einem der genannten linearen Systeme zu *erweitern*, auf der anderen Seite aber die *ebenen* und räumlichen Axiome so *einzuschränken*, daß die *Unabhängigkeit* eines jeden Axioms des neuen Gesamtsystems gewährleistet ist.

Entscheidenden Anteil am Beweis linearer Sätze im Hilbertschen System hat das *ebene Anordnungsaxiom II 4.* Um zu einem der Hilbertschen Forderung genügenden System zu gelangen, wollen wir versuchen, *II 4 zu zerlegen und ein schwächeres Axiom an seine Stelle zu setzen*, sodaß das neue System nach Vermehrung der linearen Axiome dennoch eine Geometrie gleichen Umfanges liefert. Wir beginnen mit der Erwähnung einiger bekannter Tat-

---

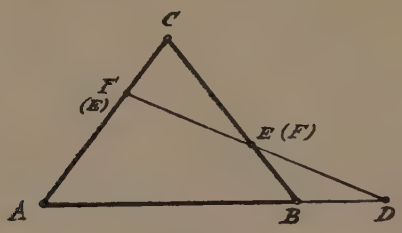
[45]) *Hilbert* „Grundlagen", 6. Auflage, S. 6, Anmerkung.

sachen, durch die ein zunächst denkbarer Weg als nicht gangbar erwiesen wird.

An die Stelle von II 4 setzen wir das in ähnlicher Form in einigen neueren Axiomensystemen [46]) enthaltene Axiom

II 4 a:

Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte einer Ebene. Ist D ein Punkt auf der Geraden AB, so daß B innerer [47]) Punkt der Strecke AD ist, und ist ferner E innerer Punkt der Strecke BC, so schneidet die Gerade DE die Strecke AC in einem inneren Punkte F: Figur 4.



Figur 4.

II 4 a ist schwächer als II 4: Es ist als Bestandteil von II 4 im Hilbertschen System der „Grundlagen" beweisbar. Soll es zur Lösung des zitierten Hilbertschen Problems dienen, so darf es zusammen mit den übrigen linearen, ebenen und räumlichen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen des neuen Systems u. a. bei keinem der zum Beweis des Hauptsatzes notwendigen linearen Anordnungsaxiome einen Beweis ermöglichen. Z. B. müßte der in Hilberts „Grundlagen" beweisbare Satz II 3 a in einem solchen neuen System als unabhängiges Axiom bestehen können. Es hat sich aber gezeigt, daß selbst aus dem Axiomensystem, welches *die Axiome I 3 a, II 1, II 2 b, II 3 a, b, die auf S. 17 genannten ebenen und räumlichen Verknüpfungsaxiome und das ebene Anordnungsaxiom II 4 a* an Stelle von II 4 enthält, die linearen Anordnungssätze S II 4—S II 8 und damit der Mooresche Vierpunktesatz und der Hauptsatz über die lineare Ordnung beweisbar sind [48]): *Die Einschränkung des Axioms II 4 bis auf den Inhalt von II 4 a* und die *Neuhinzunahme von II 3 a* als Axiom im Hilbertschen System der „Grundlagen" (7. Auflage) führen also *nicht* zu einem

---

[46]) Siehe z. B. *Max Zacharias*, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1929.

[47]) Siehe Definition VI auf S. 17.

in der zitierten Hilbertschen Bemerkung *gewünschten Axiomensystem.*

Trotzdem ist es im Hinblick auf weitere Versuche zur Lösung dieses Problems von Interesse, festzustellen, in welcher Hinsicht II 4 umfassender ist als II 4 a. Aufklärung darüber gibt der ergebnislose Versuch, II 4 aus dem eben genannten System zu beweisen, das wir kurz mit V bezeichnen wollen: Zwar läßt sich, wie bekannt ist, II 4 a auf Grund der Axiome des Systems V [48]) noch erweitern um den Satz:

II 4 b:

Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte einer Ebene. Ist D ein Punkt auf der Geraden AB, so daß B innerer Punkt der Strecke AD ist, und ist ferner E innerer Punkt der Strecke AC, so schneidet die Gerade DE die Strecke BC in einem inneren Punkte F [49]): Figur 4.

Auch II 4 b ist als Bestandteil von II 4 im Hilbertschen System der „Grundlagen" beweisbar. *II 4 a und II 4 b ergänzen sich:* Bei II 4 a liegt E auf der dem Punkt D *benachbarten* Seite BC, bei II 4 b auf der dem Punkt D *nicht benachbarten* Seite AC.

Das System V reicht aber zum vollständigen Beweis von II 4 nicht aus, wie folgende Pseudogeometrie zeigt:

Definition XII.

Als Pseudoebene gilt der durch die Hilbertschen Axiome der Verknüpfung und Anordnung begründete *Raum.* Als Punkte und Geraden der Pseudoebene gelten alle Punkte und Geraden des Raumes. Pseudobeziehungen der Elemente der Pseudoebene sind die entsprechenden normalen Beziehungen.

In dieser Pseudogeometrie gelten alle Axiome des Systems / V /, also auch / II 4 a / und / II 4 b /. Dagegen gilt nicht / II 4 /: Eine Gerade des Raumes, die eine Seite eines Dreiecks innen trifft, ohne in der normalen Ebene dieses Dreiecks zu liegen, hat keinen weiteren Punkt mit dem Dreieck gemeinsam [50]).

---

[48]) Siehe die Untersuchungen von *O. Veblen* in „Trans. Amer. Math. Soc.", 1904.

[49]) Wendet man Satz II 4 b auf das Dreieck ADE an, so folgt, daß F auch innerer Punkt der Strecke DE ist.

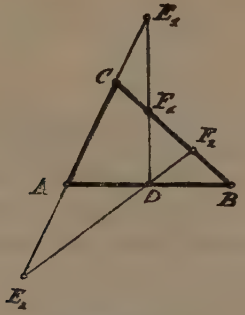
[50]) Anders verhält es sich mit der Beweisbarkeit von II 4, wenn, wie in einigen Axiomensystemen, die Ebene nicht wie bei *Hilbert* als Grundbegriff in den Axiomen auftritt, sondern unter wesentlicher Benutzung von Axiomen der Art II 4 a definiert wird: Siehe z. B. *Max Zacharias,* „Elementargeometrie der Ebene und des Raumes", Berlin 1929.

Die Pseudogeometrie gibt uns zugleich einen Hinweis zur Feststellung, welches Axiom zum System V hinzugefügt werden muß, damit II 4 beweisbar wird: Außer II 4 a und II 4 b weist II 4 den Bestandteil auf:

II 4 c.

Schneidet eine in der Ebene eines Dreiecks ABC liegende, durch keinen der Punkte A, B und C gehende Gerade a die *Seite* AB innen, so trifft sie auch entweder die *Gerade* AC oder die *Gerade* BC.

Nach Hinzunahme von II 4 c zum System V läßt sich in der Tat das Hilbertsche *ebene Anordnungsaxiom II 4 beweisen* (Figur 5):



Figur 5.

Angenommen, die in der Ebene des Dreiecks ABC gelegene, durch keinen seiner Eckpunkte gehende Gerade a schneide die Seite AB im inneren Punkte D. Nach II 4 c trifft sie entweder die Gerade AC oder die Gerade BC in einem Punkte E. Schneidet sie z. B. AC, jedoch nicht innen, so ist nach II 3 a entweder C innerer Punkt der Strecke AE oder A innerer Punkt der Strecke CE. Im ersten Falle folgt nach II 4 b, daß die Gerade ED die Strecke BC in einem Punkte F innen trifft. Im zweiten Falle ergibt sich dasselbe auf Grund von II 4 a.

Die Schwächung von II 4 durch Herausnahme zweier so wesentlicher Bestandteile wie II 4 b und II 4 c bei gleichzeitiger Hinzufügung von II 3 a als Axiom im Hilbertschen System der „Grundlagen" (7. Auflage) genügt, wie wir feststellten, nicht, die Beweisbarkeit der Vierpunktesätze unmöglich zu machen, die zum linearen Beweis des Hauptsatzes über die lineare Ordnung benötigt werden und deshalb ebenfalls als Axiome zu adjungieren sind.

Wir erkennen, daß *die Sätze II 4 a und II 4 b den Fall nicht enthalten*, daß die Gerade a zwar durch einen inneren Punkt einer Dreiecksseite geht, jedoch *eine der durch die drei Punkte bestimmten Geraden überhaupt nicht schneidet*, d. h. zu dieser parallel ist.

In der Pseudogeometrie der Definition XII gilt außer II 4 c auch nicht das *Parallelenaxiom*. Dieses lautet in der Hilbertschen Fassung:

Parallelenaxiom (IV):

Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten [51]) Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

Man erkennt sofort, daß *II 4 c eine unmittelbare Folge des Parallelenaxioms* ist. Daraus ergibt sich:

Im Hilbertschen Axiomensystem kann das *ebene Anordnungsaxiom II 4* bei Hinzunahme des Parallelenaxioms IV zu den Axiomen der Verknüpfung I und Anordnung II *durch Herausnahme des Bestandteils II 4 c eingeschränkt* werden.

Das Parallelenaxiom ist umfassender als Satz II 4 c: Es ist innerhalb der durch die Hilbertschen Axiome der Gruppe I begründeten Geometrie *gleichbedeutend* mit dem Satz:

In einer Ebene trifft jede Gerade wenigstens zwei von drei sich schneidenden anderen Geraden.

II 4 a und II 4 b kann man zu dem Satz *zusammenfassen:*

II 4 a, b:

Trifft in einer Ebene eine Gerade a zwei der durch die Eckpunkte eines Dreiecks bestimmten Geraden, und zwar die eine innerhalb, die andere außerhalb der zugehörigen Dreiecksseite, so geht a stets auch durch einen inneren Punkt der dritten Dreiecksseite: Figur 4.

Von den in dieser Arbeit genannten Systemen voneinander unabhängiger linearer Axiome, die zum Beweis des Hauptsatzes ausreichen, zeichnet sich das *System II 1, II 3 b, S II M* des Satzes 18 auf S. 47 durch besondere Einfachheit aus: Es enthält nur einen Vierpunktesatz, der zugleich II 3 a umfaßt. *Wir fügen noch das Axiom II 2 b hinzu*, um dieses System als linearen Stamm *zu einem ebenen System zu erweitern, das der Hilbertschen Forderung entspricht.* Die notwendige *Einschränkung des Hilbertschen ebenen Anordnungsaxioms II 4* hat in völlig anderer Weise als bisher zu geschehen. Wir gehen aus von dem Satz II 4 a, b, den wir in folgender Weise abändern:

[51]) Siehe Anmerkung 20) auf S. 17.

II 4 a, b*:

Trifft in einer Ebene eine Gerade a zwei der durch die Eckpunkte eines Dreiecks bestimmten Geraden, und zwar die eine innerhalb, die andere außerhalb der zugehörigen Dreiecksseite, so schneidet a stets auch die dritte *Gerade.* Der *Schnittpunkt* liegt *innerhalb der dritten Dreiecksseite, wenn diese überhaupt einen inneren Punkt enthält.*

Dabei ist es nötig, die Definition des Begriffes *„außerhalb"* in Abänderung der Definition VI auf S. 17 *neu zu fassen:*

Auf einer Geraden liege ein Punkt D außerhalb der Strecke AC, wenn er

(1.) *nicht innerer* Punkt der Strecke AC ist, *und wenn*

(2.) einer der Endpunkte von AC innerhalb [52]) der durch D und den anderen Endpunkt bestimmten Strecke liegt.

Der *Sinn der Bedingung (2.)* ergibt sich bei dem Beweis der *Unabhängigkeit von S II M* und damit von II 3 a unter (d) auf S. 53.

Wir betrachten zunächst das ebene System, das aus den linearen Anordnungsaxiomen II 1, II 2 b, II 3 b, S II M, dem ebenen Anordnungsaxiom II 4 a, b* und den Verknüpfungsaxiomen I 1, I 2, I 3 a, b und I 6 (S. 12 und 17) besteht. Die im Axiom II 4 a, b* gemachte Einschränkung, daß die Gerade a die dritte Dreiecksseite nur bedingt innen schneidet, ist insofern gerechtfertigt, als *unter den angeführten Axiomen II 2 a fehlt,* das unmittelbar die Existenz wenigstens eines inneren Punktes jeder Strecke auf der Geraden begründet. Soll aber die durch das neu aufzustellende Axiomensystem begründete Geometrie denselben Umfang besitzen wie die der Hilbertschen Axiome, so muß wie bei Hilbert auch im neuen System der *Satz II 2 a beweisbar* sein. Ist dies nämlich der Fall, *so folgt aus II 4 a, b* und II 2 a der Satz II 4 a, b.* Außerdem muß, damit im neuen System das Hilbertsche *Anordnungsaxiom II 4 beweisbar* wird, entweder das Parallelenaxiom hinzugenommen werden, oder, wenn man sich auf eine vollständige Geometrie der Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome beschränken will, der *Satz II 4 c.*

Wir wählen das letztere und *bezeichnen* das so entstandene *System der Axiome I 1, I 2, I 3 a, b, I 6, II 1, II 2 b, II 3 b, S II M, II 4 a, b* und II 4 c kurz mit H.*

Die linearen Anordnungsaxiome des Systems H reichen nach Satz 18 auf S. 47 aus, um den Hauptsatz abzuleiten. Gelingt es,

---

[52]) Der Begriff „innerhalb" bleibt derselbe wie in Definition VI.

1.) zu beweisen, daß die Axiome des Systems H *unabhängig* sind, und 2.) den Satz II 2 a aus ihm zu folgern, so erfüllt das System H die zitierte Hilbertsche Forderung.

(1) Nachweis der *Unabhängigkeit* der Axiome des Systems H.

(a) Die *Unabhängigkeit des Axioms II 1 b* ergibt sich aus folgender Pseudogeometrie: Als Pseudoebene dient eine normale durch die Hilbertschen Axiome der Gruppen I und II begründete Ebene, in der auf einer einzigen Geraden statt der normalen Zwischenbeziehung die Pseudozwischenbeziehung der Definition XI auf S. 35 gilt, während sonst alles unverändert bleibt.

(b) Die *Unabhängigkeit des Axioms II 2 b* folgt daraus, daß alle Axiome des Systems H außer II 2 b in einer normalen Halbebene einschließlich der sie erzeugenden Geraden gelten (siehe Absatz (III) auf S. 38).

(c) Den Nachweis der *Unabhängigkeit von II 3 b* erbringt folgende Pseudoebene: Sie geht aus der durch die Hilbertschen Axiome der Gruppen I und II und das Parallelenaxiom begründeten normalen Ebene α dadurch hervor, daß für alle Geraden die Gültigkeit der zum Unabhängigkeitsbeweis des Axioms II 3 b in Absatz (V) auf S. 39 definierten Pseudozwischenbeziehung festgesetzt wird.

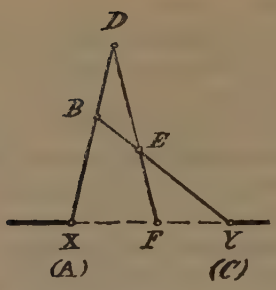
In dieser Pseudoebene sind die *Voraussetzungen für eine Anwendung des Axioms / II 4 a, b* / überhaupt nicht gegeben*, da es auf jeder Geraden zu zwei beliebigen Punkten A und C keinen außerhalb [53]) der Strecke AC liegenden Punkt D gibt: Jeder von A und C verschiedene Punkt D der Geraden liegt innerhalb der Strecke AC. — Die *Gültigkeit von / II 4 c /* ist in dem Falle, daß der Schnittpunkt der Geraden a mit der Seite AB des Dreiecks ABC zwar in der Pseudoebene innerhalb, in der normalen Ebene aber außerhalb der Strecke AB liegt, durch das *Parallelenaxiom* gewährleistet.

(d) Zum Nachweis der *Unabhängigkeit des Mooreschen Vierpunktesatzes S II M* definieren wir eine Pseudoebene, die sich von der normalen Ebene α des Absatzes (c) nur dadurch unterscheidet, daß auf einer einzigen Geraden jeder zwischen zwei festen Punkten X und Y gelegene Punkt *in keiner Pseudozwischenbeziehung* zu den Punkten X und Y steht.

Hier wird der Sinn der *Einschränkungen*, die beim *Axiom II 4 a, b* gegenüber dem Satz II 4 a, b* gemacht werden mußten, offenbar: im Falle der Figur 6 schneidet die Gerade DE gemäß

---

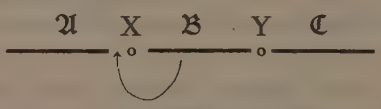
[53]) Siehe S. 52.



Figur 6.

/ II 4 a, b* / die Gerade AC in einem Punkte F. F liegt nicht innerhalb der Strecke XY, da diese überhaupt keine inneren Punkte in unserer Pseudogeometrie besitzt[54]). Entsprechend der Bedingung (2.) auf S. 52 liegt aber F auch nicht außerhalb der Strecke XY. Gälte F in unserer Pseudogeometrie als außerhalb der Strecke AC gelegen, so ergäbe sich ein Widerspruch: Dann müßte nämlich die Gerade FE, die die Seite BC in E innen trifft, nach / II 4 a, b* / die Strecke AB entgegen den tatsächlichen Verhältnissen innen schneiden. *Um solche Widersprüche in einer Pseudogeometrie, in der mit / S II M / / II 3 a / nicht gilt, zu vermeiden,* mußte bei der Definition von „innerhalb" und „außerhalb" Raum gelassen werden für eine *dritte Klasse von Punkten*, die zwar auch auf der Geraden, aber *weder „innerhalb" noch „außerhalb"* einer gewissen Strecke liegen.

(e) Nachweis der *Unabhängigkeit des Axioms II 4 a, b *:* Als Pseudoebene dient die durch die Hilbertschen Axiome der Gruppen I—IV begründete normale Ebene, bis auf die Zwischenbeziehungen einer Geraden g. Auf dieser definieren wir eine von der normalen ordnenden Beziehung $<$ des Hauptsatzes 1 abweichende ordnende Beziehung $/</$:

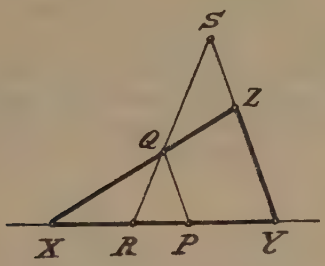


Figur 7.

Durch zwei Punkte X und Y, für die $X < Y$ gelte, wird die Gesamtheit aller von X und Y verschiedenen Punkte der Geraden g

[54]) Es gilt also in dieser Pseudogeometrie nicht der Satz / II 2 a /.

in drei Klassen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ eingeteilt (Figur 7). Die Beziehung $/</$ sei mit der normalen ordnenden Beziehung $<$ identisch bis auf den Punkt X und die Punkte $P_{\mathfrak{B}}$ der Punktmenge $\mathfrak{B}$. Statt $X < P_{\mathfrak{B}}$ soll $P_{\mathfrak{B}}\ /</\ X$ gelten. Mit anderen Worten: Die durch die Festsetzung $X < Y$ bestimmte Ordnung $<$ der Gesamtheit aller Punkte der Geraden g wird nur dadurch geändert, daß die *Punktmenge $\mathfrak{B}$ zwischen die Punktmenge $\mathfrak{A}$ und den Punkt X geschoben* wird. Da auf diese Weise eine neue lineare Ordnung mit einer neuen Zwischenbeziehung geschaffen worden ist, gelten auf der Geraden g alle linearen Anordnungssätze des Systems / H /[55]). In der Pseudoebene gelten alle Axiome des Systems / H / mit Ausnahme von / II 4 a, b * /:



Figur 8.

In Figur 8 schneidet in unserer Pseudogeometrie die zu YZ parallele Gerade PQ[56]) die Dreiecksseite XZ innen und die Gerade XY im Punkte P außerhalb der Strecke XY: Es gilt nämlich weder / XPY / noch /YPX /, wohl aber / PXY /. Bei Gültigkeit des ersten Teiles von / II 4 a, b * / müßte also die Gerade PQ die Gerade YZ treffen, was nicht der Fall ist. — Aber auch der zweite Teil von / II 4 a, b * / gilt nicht: Ist R ein Punkt, für den XRP gilt, so trifft die Gerade RQ in der normalen Geometrie die Gerade YZ in einem außerhalb der Strecke YZ gelegenen Punkte S. Auch in unserer Pseudogeometrie liegt S außerhalb der Strecke YZ. Bei Gültigkeit des zweiten Teiles von / II 4 a, b * / müßte aber in der Pseudoebene die Strecke YZ in S innen getroffen werden, da die Strecke YZ ihre normalen inneren Punkte auch in der Pseudogeometrie als innere Punkte enthält.

---

[55]) Wie in der vorigen Pseudogeometrie gilt auch hier nicht der Satz / II 2 a /, da die Strecke XY keinen inneren Punkt enthält.

[56]) Die Existenz der Parallelen PQ folgt aus den Hilbertschen Axiomen der Gruppen I—III.

(f) Die *Unabhängigkeit des Axioms II 4 c* ergibt sich schließlich aus der Pseudogeometrie der Definition XII auf S. 49.

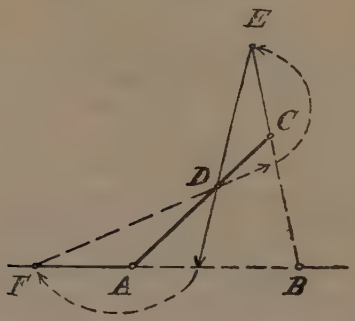
(2) *Beweis des Satzes II 2 a aus dem System H:*

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz:

Hat in einem Dreieck eine Seite wenigstens einen inneren Punkt, eine zweite Seite dagegen keinen, so hat auch die dritte Seite keinen inneren Punkt.

Angenommen, im Dreieck ABC (Figur 9) habe die Strecke AB keinen inneren Punkt und die Strecke AC den inneren Punkt D. Nach II 2 b existiert E so, daß BCE gilt. Da nach II 3 b der Punkt E außerhalb der Strecke BC liegt, muß nach II 4 a, b * die Gerade ED die Gerade AB in einem Punkte F treffen. Dieser kann nach Voraussetzung nicht innerhalb der Strecke AB liegen. Nach S II M (II 3 a) liegt F also außerhalb der Strecke AB. Hätte nun die dritte Dreiecksseite BC auch nur einen inneren Punkt, so



Figur 9.

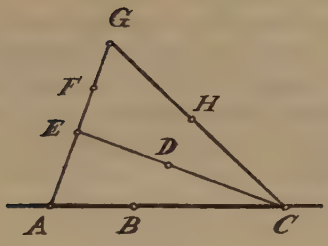
müßte die Gerade FD nach II 4 a, b * die Strecke BC in E innen treffen, entgegen II 3 b.

Man kann den Hilfssatz auch so formulieren:

Haben in einem Dreieck zwei Seiten je wenigstens einen inneren Punkt, so gilt dies auch von der dritten Seite.

Nun zum eigentlichen Beweis von II 2 a:

Auf einer Geraden seien zwei beliebige Punkte A und C gegeben (Figur 10). Außerhalb der Geraden gibt es in der gegebenen Ebene auf Grund der Axiome des Systems H die Punkte D und E so, daß CDE gilt, ferner F so, daß AEF ist und G so, daß EFG gilt. Aus AEF und EFG folgt nach S II 7 die Beziehung AEG,



Figur 10.

wobei S II 7 aus den linearen Anordnungsaxiomen des Systems H beweisbar ist. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz muß im Dreieck CEG die Seite CG wenigstens einen inneren Punkt H besitzen. Da also im Dreieck ACG die Seiten AG und CG je wenigstens einen inneren Punkt haben, gilt dies nach dem Hilfssatz auch für die dritte Seite AC. Damit ist Satz II 2 a bewiesen.

Wir können also den Satz aussprechen:

Satz 19:

Die Hilbertschen linearen, ebenen und räumlichen Verknüpfungsaxiome I 1–3 und I 6 (S. 12 und 17), die linearen Anordnungsaxiome II 1, II 2 b, II 3 b (S. 12) und S II M (S. 46) und die beiden ebenen Anordnungsaxiome II 4 a, b * (S. 52) und II 4 c (S. 50) bilden ein *ebenes Axiomensystem H*, dessen Axiome voneinander *unabhängig* sind, und in dem *„die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben"*.

Wie „stark" das durch Einschränkung des Hilbertschen ebenen Anordnungsaxioms II 4 entstehende Axiom II 4 a, b * noch ist, geht aus der auf den ersten Blick sonderbar erscheinenden Tatsache hervor, daß im System H der Satz II 2 a mittels des Axioms II 4 a, b * beweisbar ist, obwohl in diesem das Vorhandensein wenigstens eines Punktes innerhalb der dritten Dreiecksseite die Bedingung dafür ist, daß diese Seite innen getroffen wird.

Weitere Untersuchungen müssen zeigen, ob auch die in Satz 15 auf S. 39 genannten linearen Systeme nach Weglassen von II 2 a als Bestandteile von ebenen Systemen verwandt werden können, die der zitierten Hilbertschen Forderung entsprechen.

Das System H kann wegen der besonderen Form des ebenen Anordnungsaxioms II 4 a, b * hinsichtlich der Forderung der Einfachheit keineswegs befriedigen. Man kann die Frage stellen, ob

im Rahmen des Hilbertschen Systems der „Grundlagen“ durch Adjunktion anderer linearer Anordnungssätze anstelle von S II M oder durch eine andere Art der Einschränkung des ebenen Anordnungsaxioms II 4 anstelle der von uns gewählten überhaupt die Aufstellung eines der zitierten Hilbertschen Forderung genügenden ebenen Axiomensystems möglich ist, das zugleich die Forderung der Einfachheit erfüllt.

V. Anhang: Der Begriff der „gleichen Richtung“ je zweier Geraden eines Parallelenbüschels in seiner Beziehung zum Begriff der „beiden Richtungen auf der Geraden“.

Von zwei *parallelen* Geraden, d. h. zwei in derselben Ebene gelegenen Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, sagt man, sie haben *„gleiche Richtung“* oder sie seien *„gleichgerichtet“*. Diese symmetrische Beziehung zwischen zwei verschiedenen Geraden einer Ebene wird zu einer auf die Gesamtheit aller Geraden einer Ebene anwendbaren transitiven und reflexiven, also einer *Gleichheitsbeziehung*, erweitert auf Grund des *Parallelenaxioms* und durch die Festsetzung, daß jede Gerade zu sich selbst „gleichgerichtet“ sein soll. Dadurch ist die Anwendung des Wortes „gleich“ zur Kennzeichnung dieser Beziehung gerechtfertigt.

Das Wort „Richtung“ bezw. „gerichtet“ bringt einen *Zusammenhang* zwischen der *Eigenschaft zweier Geraden einer Ebene, sich nicht zu schneiden*, und dem im Hauptsatz 1“ (S. 7) ausgesprochenen *Vorhandensein zweier zueinander entgegengesetzter Richtungen auf der Geraden* zum Ausdruck:

Auf die Gesamtheit aller gerichteten Strecken[57]) zweier verschiedener, aber paralleler Geraden ist eine Gleichheitsbeziehung anwendbar, die mit der des *Hauptsatzes 1“* identisch ist, sobald es sich um Strecken derselben Geraden handelt.

Wesentlich ist, daß diese Beziehung lediglich auf Grund der *Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome* definiert werden kann.

Wir benutzen dazu den Begriff der Halbebene, dem in der linearen Geometrie der zum Beweis des Hauptsatzes verwendete Begriff des Halbstrahls entspricht. Analog dem Satz 5 auf S. 13 gilt der

---

[57]) Siehe Definition II auf S. 5.

Satz 20.

Jede Gerade a einer Ebene teilt die Gesamtheit aller nicht auf der Geraden liegenden Punkte der Ebene so in zwei Klassen, daß die Gerade a mit jeder durch zwei Punkte verschiedener Klassen bestimmten Strecke [58]) einen inneren [58]) Punkt, mit der durch zwei Punkte derselben Klasse bestimmten Strecke jedoch keinen Punkt gemeinsam hat. — Jede der beiden Klassen heißt „durch die Gerade a bestimmte *Halbebene*". Man sagt auch: Zwei Punkte derselben Halbebene liegen auf derselben Seite, zwei Punkte aus verschiedenen Halbebenen liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden a [59]).

Der Beweis dieses Satzes wird unter wesentlicher Benutzung des ebenen Anordnungsaxioms II 4 geführt.

Wir definieren die Beziehung des „*Gleichgerichtetseins*" zwischen *zwei gerichteten Strecken auf verschiedenen Geraden einer Ebene* unter Anlehnung an die für die gerichteten Strecken einer und derselben Geraden geltende Beziehung des *Hauptsatzes 1"*.

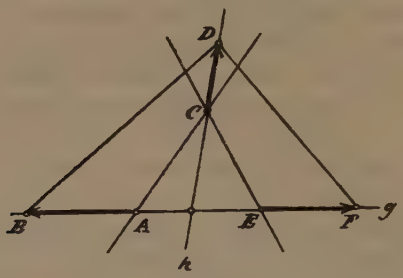
Auf einer Geraden sind von allen Strecken mit gemeinsamem Anfangspunkt O je zwei Strecken dann und nur dann gleichgerichtet im Sinne des Hauptsatzes 1", wenn ihre Endpunkte auf derselben Seite von O liegen [60]). Dem Punkt O auf der Geraden entspricht die Gerade a in der Ebene. Für eine sinnvolle Ausdehnung der Definition dieser Beziehung des „Gleichgerichtetseins" auf Strecken verschiedener Geraden kommen nur solche Strecken in Frage, deren Anfangspunkte verschieden sind, also eine die Ebene in zwei Halbebenen teilende Gerade a bestimmen, und deren Endpunkte nicht auf dieser Geraden liegen.

Man kann zunächst auf den Gedanken kommen, zwei solche Strecken dann als „gleichgerichtet" zu bezeichnen, wenn ihre Endpunkte in derselben Halbebene liegen, ohne zu fordern, daß die durch die Strecken bestimmten Geraden parallel sind. Diese Beziehung würde aber nicht der Forderung genügen, mit der linearen Beziehung des Gleichgerichtetseins zusammen als Gleichheitsbeziehung auf die Gesamtheit aller Strecken zweier verschiedener Geraden anwendbar zu sein: In Figur 11 wären dann die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einerseits und $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ andererseits „gleichgerichtet", während $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ im Sinne des Hauptsatzes 1" engegengesetzt gerichtet sind.

---

58) Siehe Definition VI auf S. 17.
59) Siehe *Hilberts* „Grundlagen".
60) Siehe Definition V auf S. 13.

Für die *Ausdehnung der Definition der Beziehung des „Gleichgerichtetseins“* auf die Strecken verschiedener Geraden einer Ebene kommen also nur zwei sich *nicht schneidende* Geraden in Frage.



Figur 11.

Definition XIII.

Von zwei auf verschiedenen aber *parallelen* Geraden gelegenen *gerichteten Strecken* $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$, deren Anfangspunkte verschieden sind, und deren Endpunkte nicht der durch die Anfangspunkte bestimmten Geraden a angehören, heißt

$\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{CD}$ (zu lesen: $\overrightarrow{AB}$ *gleichgerichtet* $\overrightarrow{CD}$),

wenn die Endpunkte *auf derselben Seite* der Geraden a liegen.

Entsprechend heißt von zwei auf parallelen Geraden gelegenen Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \not\Longrightarrow \overrightarrow{CD}$ (zu lesen: $\overrightarrow{AB}$ *entgegengesetzt gerichtet*, d. h. nicht gleichgerichtet, $\overrightarrow{CD}$),

wenn ihre Endpunkte *auf verschiedenen Seiten* der durch die Anfangspunkte bestimmten Geraden liegen.

Es gilt also, mit den *Axiomen der Verknüpfung und Anordnung in Hilberts „Grundlagen“* den Satz zu beweisen:

Satz 21.

Auf die Gesamtheit aller *gerichteten Strecken zweier paralleler Geraden* ist eine durch das Zeichen $\Longrightarrow$ (zu lesen: gleichgerichtet) ausgedrückte *Gleichheitsbeziehung* anwendbar, die folgende Bedingungen erfüllt:

1.) Die Beziehung $\Longrightarrow$ ist mit der Beziehung $\longrightarrow$ des Hauptsatzes 1” identisch, wenn die beiden Strecken *auf derselben Geraden* liegen.

2.) Die Beziehung $\overline{\overline{AB}} \Longrightarrow \overline{\overline{CD}}$ ist mit der Beziehung $\overline{\overline{AB}} \Longrightarrow \overline{\overline{EF}}$ der Definition XIII identisch, wenn die beiden Strecken *auf verschiedenen Geraden* liegen.

3.) Aus $\overline{\overline{AB}} \not\Longrightarrow \overline{\overline{CD}}$ und $\overline{\overline{CD}} \not\Longrightarrow \overline{\overline{EF}}$ folgt $\overline{\overline{AB}} \Longrightarrow \overline{\overline{EF}}$ (Das Zeichen $\not\Longrightarrow$ bedeutet: entgegengesetzt gerichtet, d. h. nicht gleichgerichtet).

Wir beweisen *zunächst*

Satz 21':

Gegeben sei eine Gerade g und eine gerichtete Strecke $\overline{\overline{PQ}}$ auf einer zu g parallelen Geraden h. Die Einteilung K der Gesamtheit aller gerichteten Strecken der Geraden g in zwei Klassen [61]), so daß zur einen Klasse alle zur Strecke $\overline{\overline{PQ}}$ im Sinne der Definition XIII gleichgerichteten Strecken, zur anderen Klasse alle übrigen Strecken gehören, ist die *Klasseneinteilung des Hauptsatzes I'* auf S. 5.

Es gilt zu zeigen, daß

(I) zwei Strecken $\overline{\overline{AB}}$ und $\overline{\overline{BC}}$ der Geraden g dann und nur dann derselben Klasse der Klasseneinteilung K angehören, wenn ABC gilt, und daß

(II), wenn zwei Strecken $\overline{\overline{AB}}$ und $\overline{\overline{BC}}$ auf g derselben Klasse der Klasseneinteilung K angehören, auch $\overline{\overline{AC}}$ in diese Klasse fällt.

Unmittelbar aus der Definition XIII ergibt sich, daß die Beziehung $\Longrightarrow$ ebenso wie die Beziehung $\not\Longrightarrow$ symmetrisch ist.

(I) (1) Es seien auf der Geraden g drei Punkte A, B und C gegeben, die in der Beziehung ABC stehen.

Es gilt entweder $\overline{\overline{PQ}} \Longrightarrow \overline{\overline{AB}}$ oder $\overline{\overline{PQ}} \not\Longrightarrow \overline{\overline{AB}}$. Zu beweisen ist, daß

a) neben $\overline{\overline{PQ}} \Longrightarrow \overline{\overline{AB}}$ auch $\overline{\overline{PQ}} \Longrightarrow \overline{\overline{BC}}$ oder

b) neben $\overline{\overline{PQ}} \not\Longrightarrow \overline{\overline{AB}}$ auch $\overline{\overline{PQ}} \not\Longrightarrow \overline{\overline{BC}}$ gilt.

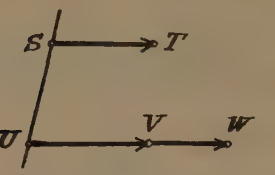
(a) Behauptung: Aus $\overline{\overline{PQ}} \Longrightarrow \overline{\overline{AB}}$ und ABC folgt $\overline{\overline{PQ}} \Longrightarrow \overline{\overline{BC}}$.

Wir beweisen zunächst zwei Hilfssätze, die im weiteren Verlauf des Beweises mehrfach verwandt werden:

Hilfssatz 1: Aus $\overline{\overline{ST}} \Longrightarrow \overline{\overline{UV}}$ und UVW folgt $\overline{\overline{ST}} \Longrightarrow \overline{\overline{UW}}$ und umgekehrt:

[61]) Siehe Definition III auf S. 5.

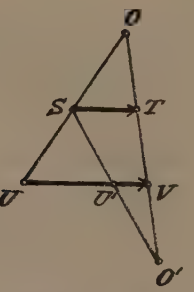
aus $\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UW}$ und UVW folgt
$\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UV}$.



Figur 12.

Beweis (Figur 12): Wegen $\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UV}$ ($\overline{UW}$) liegen die Punkte T und V (W) auf derselben Seite der Geraden SU. Nach II 3 b liegen auch V und W auf derselben Seite dieser Geraden. Es gilt also $\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UW}$ ($\overline{UV}$).

Hilfssatz 2: Aus $\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UV}$ folgt $\overline{TS} \Longrightarrow \overline{VU}$.



Figur 13.

Beweis (Figur 13): Die Geraden SU und TV mögen sich im Punkte O schneiden. Dann ist entweder T innerer Punkt der Strecke OV oder V innerer Punkt der Strecke OT (II 3 a). Da die Geraden ST und UV parallel sind, schneidet nach II 4 entweder die Gerade ST die Strecke OU in S innen, oder die Gerade UV die Strecke OS in U innen. Nach II 3 b ist also O nicht innerer Punkt der Strecke SU, d. h. es gilt $\overline{TS} \Longrightarrow \overline{VU}$.

Aus $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AB}$ und ABC folgt nun nacheinander nach Hilfssatz 1 $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AC}$, nach Hilfssatz 2 $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{CA}$, nach Hilfssatz 1 und II 1 b $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{CB}$ und nach Hilfssatz 2 $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{BC}$.

(b) Behauptung: Aus $\overline{PQ} \not\Longrightarrow \overline{AB}$ u. ABC folgt $\overline{PQ} \not\Longrightarrow \overline{BC}$:
Wäre statt dessen $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{BC}$, so gälte nach Hilfssatz 2

$\overline{QP} \Longrightarrow \overline{CB}$. Daraus und aus CBA (II 1 b) würde nach dem unter (1 a) Bewiesenen $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{BA}$ und weiter nach Hilfssatz 2 $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AB}$ folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung.

(2) Es seien umgekehrt zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ auf g gegeben, die zu derselben Klasse der Klasseneinteilung K des Satzes 21' gehören.

Es sei also entweder $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AB}$ und $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{BC}$ oder

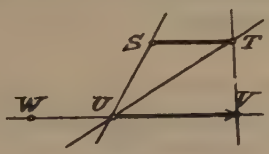
$\overline{PQ} \nRightarrow \overline{AB}$ und $\overline{PQ} \nRightarrow \overline{BC}$.

Zu beweisen ist, daß weder BCA noch BAC gilt, sodaß ABC gelten muß (II 3 a, II 1 b).

(a) Die Annahme BCA führt auf einen Widerspruch.

Wir beweisen zunächst zwei weitere Hilfssätze:

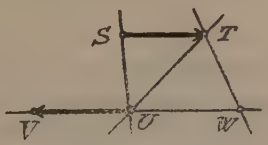
Hilfssatz 3: Aus $\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UV}$ folgt $\overline{TS} \nRightarrow \overline{UV}$.



Figur 14.

Beweis (Figur 14): Nach II 2 b gibt es einen Punkt W, so daß VUW gilt. Da nach Hilfssatz 2 $\overline{TS} \Longrightarrow \overline{VU}$ ist, folgt nach dem unter (1 a) Bewiesenen $\overline{TS} \Longrightarrow \overline{UW}$. S und W liegen also auf derselben Seite der Geraden TU. Da V und W auf verschiedenen Seiten von TU liegen, gilt dasselbe für V und S, d. h.: es ist $\overline{TS} \nRightarrow \overline{UV}$.

Hilfssatz 4: Aus $\overline{ST} \nRightarrow UV$ folgt $TS \nRightarrow \overline{UV}$.



Figur 15.

Beweis (Figur 15): Nach II 2 b gibt es einen Punkt W, so daß VUW gilt. Da T und V einerseits, V und W andererseits

auf verschiedenen Seiten der Geraden SU liegen, liegen T und W auf derselben Seite dieser Geraden. Es gilt also $\overline{ST} \Longrightarrow \overline{UW}$, woraus nach Hilfssatz 2 $\overline{TS} \Longrightarrow \overline{WU}$ folgt. Daraus und aus WUV (II 1 b) ergibt sich nach dem unter (1 a) Bewiesenen $\overline{TS} \Longrightarrow \overline{UV}$.

(α) Aus $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{BC}$ und BCA würde nach Hilfssatz 1 $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{BA}$, also auch $\overline{BA} \Longrightarrow \overline{PQ}$, und daraus nach Hilfssatz 3 $\overline{AB} \not\Longrightarrow \overline{PQ}$, also $\overline{PQ} \not\Longrightarrow \overline{AB}$ folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung.

(β) Entsprechend würde aus $\overline{PQ} \not\Longrightarrow \overline{BC}$ und BCA $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AB}$ folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung: Nach Hilfssatz 4 würde nämlich $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{BC}$, daraus und aus BCA nach Hilfssatz 1 $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{BA}$ folgen, woraus sich nach Hilfssatz 2 $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AB}$ ergeben würde.

(b) Daß auch BAC nicht gelten kann, folgt wegen der Symmetrie der Beziehungen BCA und BAC in bezug auf A und C aus dem soeben durchgeführten Teil (2a) dieses Beweises.

(II) Gehören zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ auf der Geraden g derselben Klasse der Klasseneinteilung K des Satzes 21' an, so gilt nach Teil (I, 2) dieses Beweises ABC.

(a) Ist $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AB}$, so folgt nach Hilfssatz 1 $\overline{PQ} \Longrightarrow \overline{AC}$.

(b) Ist $\overline{PQ} \not\Longrightarrow \overline{AB}$, so folgt nach Hilfssatz 4 $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{AB}$. Nach Hilfssatz 1 ist dann $\overline{QP} \Longrightarrow \overline{AC}$, woraus sich nach Hilfssatz 3 $\overline{PQ} \not\Longrightarrow \overline{AC}$ ergibt.

Damit ist Satz 21' bewiesen.

Zum *Beweis des Satzes 21* bedarf es nur der Feststellung, daß auch in den Fällen, in denen die drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ auf zwei verschiedenen (parallelen) Geraden liegen, die Beziehung $\Longrightarrow\!\!\triangleright$ transitiv ist, während aus $\overline{AB} \not\Longrightarrow\!\!\triangleright \overline{CD}$ und $\overline{CD} \not\Longrightarrow\!\!\triangleright \overline{EF}$ $\overline{AB} \Longrightarrow\!\!\triangleright \overline{EF}$ folgt:

Das ergibt sich unmittelbar aus Satz 21':

Aus der mit der Klasseneinteilung des Hauptsatzes 1' identischen Klasseneinteilung K des Satzes 21' entspringt die Gleichheitsbeziehung $\longrightarrow$ des Hauptsatzes 1" im Sinne des Absatzes (α) auf S. 8, d. h.:

Für je zwei auf der Geraden g gelegene Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gilt $\overline{AB} \longrightarrow \overline{CD}$ oder $\overline{AB} \not\longrightarrow \overline{CD}$, je nachdem sie derselben

Klasse oder verschiedenen Klassen der Klasseneinteilung K angehören.

Sind also auf einer Geraden h eine Strecke $\overline{AB}$, auf einer zu h parallelen Geraden g zwei Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ gegeben, und ist

1.) $\overline{AB} \Longrightarrow \overline{CD}$ und $\overline{CD} \longrightarrow \overline{EF}$ oder

2.) $\overline{AB} \mid\!\Rightarrow \overline{CD}$ und $\overline{CD} \mid\!\rightarrow \overline{EF}$, so folgt in beiden Fällen $\overline{AB} \Longrightarrow \overline{EF}$.

Wir haben mittels der Axiome der Verknüpfung und Anordnung von Hilberts „Grundlagen" bewiesen, daß *zwei parallele Geraden im Gegensatz zu zwei sich schneidenden Geraden* die Definition einer für die Gesamtheit aller gerichteten Strecken beider Geraden geltenden *Gleichheitsbeziehung* gestatten, die als Beziehung in der Ebene *entsprechend der linearen Richtungsbeziehung des Hauptsatzes definiert* ist und *diese als Sonderfall umfaßt.* Man kann deshalb von zwei parallelen Geraden sagen, sie haben „gleiche Richtung".

Die Eigenschaft, im Sinne des Satzes 21 „gleiche Richtung" zu haben oder „gleichgerichtet" zu sein, ist zwei parallelen Geraden allein *durch die Axiome der Verknüpfung und Anordnung* im Hilbertschen System *vorbestimmt,* ehe noch durch Hinzunahme der Kongruenzaxiome der Gruppe III in einer Ebene *die Existenz wenigstens einer Parallelen* zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb derselben *bewiesen werden kann.*

Durch die Beziehung des Satzes 21 ist zugleich eine *Gerade als Ganzes* zu einer von ihr verschiedenen (parallelen) Geraden in Beziehung gesetzt. Diese Beziehung ist symmetrisch und wird für drei verschiedene Geraden, von denen je zwei parallel sind, transitiv auf Grund des *Parallelenaxioms.* Erweitert man die Beziehung durch die Definition, daß jede Gerade zu sich selbst „gleichgerichtet" sein soll, so ist die erweiterte Beziehung des „Gleichgerichtetseins" reflexiv und damit auch für den Fall nur zweier paralleler Geraden transitiv. Sie stellt dann *eine auf die Gesamtheit aller Geraden der Ebene anwendbare Gleichheitsbeziehung* dar, wodurch das Wort „gleich" in den zunächst nur für die gerichteten Strecken einer Geraden geprägten Ausdrücken „gleiche Richtung" und „gleichgerichtet" eine allgemeinere Bedeutung erhält. — Umgekehrt gewinnt die zu Beginn dieses Kapitels erwähnte *Bezeichnung „gleichgerichtet"*, die in formaler Weise zunächst nur einen anderen Ausdruck für identisch oder parallel

darstellt, einen *neuen Sinn, durch den die Beziehung des Identisch- oder Parallelseins zwischen zwei Geraden mit den beiden Richtungen auf einer Geraden und damit der linearen Ordnung verknüpft wird.*

Die Beziehung des „Gleichgerichtetseins" zwischen je zwei parallelen oder auf derselben Geraden liegenden gerichteten Strecken in Satz 21 wird auf Grund des Parallelenaxioms zu einer auf die Gesamtheit aller gerichteten Strecken einer Ebene anwendbaren Gleichheitsbeziehung.

Aus ihr entspringt eine Einteilung der Gesamtheit aller gerichteten Strecken der Ebene in Klassen, deren jede alle Strecken einer bestimmten Richtung enthält.

In entsprechender Weise entspringt aus der auf die Gesamtheit aller Geraden einer Ebene anwendbaren Beziehung des „Gleichgerichtetseins" eine Einteilung dieser Gesamtheit in Klassen, die Parallelenbüschel.

Literaturverzeichnis.

1. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 6. und 7. Auflage, Berlin 1923 bezw. 1930.
2. Feigl: Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 33, 1924.
3. Huntington und Kline: Sets of independent postulates for betweenness. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 18, 1917.
4. E. H. Moore: On the projective axioms of geometry. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 3, 1902.
5. Tschetweruchin: Über die Bedeutung des Axioms von Pasch für die linearen Anordnungsaxiome. Jahresbericht der D. Math. Vereinigung, Bd. 33, 1924.
6. Veblen: A system of axioms for geometry. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 5, 1904.
7. Zacharias: Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1929.

Lebenslauf.

Am 7. November 1906 wurde ich als Sohn des damaligen Werkmeisters Adolf Irmer zu Siegen i. W. geboren. Ich bin evangelisch und deutscher Staatsbürger. —

Von Ostern 1913 bis Ostern 1915 besuchte ich die Volksschule in Siegen i. W., von Ostern 1915 bis Ostern 1917 die Volksschule in Weidenau-Sieg. Nach neunjährigem Besuch der Oberrealschule in Weidenau-Sieg verließ ich diese zu Ostern 1926 mit dem Zeugnis der Reife.

Ich studierte Mathematik, Physik und Philosophie, und zwar von Ostern 1926 bis Ostern 1927 in Marburg, von Ostern 1927 bis Ostern 1928 in Kiel und von Ostern 1928 bis Ostern 1931 in Marburg. Außerdem nahm ich von Ostern 1926 bis Ostern 1928 an den Staatlichen Turnlehrerkursen der Universitäten Marburg und Kiel teil.

In Kiel bestand ich Ostern 1928 die Prüfung für Turn-, Sport- und Schwimmlehrer. Im Dezember 1931 legte ich in Marburg das wissenschaftliche Staatsexamen in Mathematik und Physik als Hauptfächern ab.

Der Tag der mündlichen Doktorprüfung war der 22. 6. 1933.

Meine akademischen Lehrer waren: in Kiel die Herren Geiger, Kossel, Neuendorff, Steinitz und Toeplitz, in Marburg die Herren von Auwers, Grüneisen, Heidegger, Hensel, Jaeck, Jaensch, Krafft, Mahnke, Neumann, Rehmke, Schaefer, F. A. Schulze, Senftleben, Tomaschek und Zühlke.

Seit Ostern 1932 bin ich im höheren Schuldienst. Nach zweijähriger Ausbildungszeit am Archigymnasium in Soest i. W. und an der Oberrealschule in Weidenau-Sieg bestand ich Ostern 1934 in Dortmund i. W. die pädagogische Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen.

Von Ostern 1934 bis zum 1. Juli 1935 war ich Erzieher an der Nationalpolitischen Erziehungsanstalt Oranienstein; seitdem bin ich als Erzieher an der Nationalpolitischen Erziehungsanstalt Bensberg bei Köln/Rh. tätig.

Herrn Professor Dr. Krafft bin ich für die wissenschaftliche und menschliche Förderung und Betreuung, die er mir während des Studiums und nachher zuteil werden ließ, zu besonderem Dank verpflichtet.